

**PROYECTO INTEGRADOR DE INGENIERÍA
MECÁNICA**

**CARACTERIZACIÓN DE FLUJOS SECUNDARIOS
TURBULENTOS EN DUCTOS CURVOS**

Lucas Berardini

Dr. Mariano I. Cantero
Director

Mgter. Julia V. Martorana
Co-directora

Miembros del Jurado

Dr. Christian Marcel
Dr. Enzo Dari

Junio de 2019

Departamento de Mecánica Computacional – Centro Atómico
Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mi familia

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xiii
Resumen	xv
Abstract	xvii
1. Introducción	1
1.1. Flujo secundario	1
1.2. Inestabilidades por ondas de densidad	3
1.3. Estado del arte	4
1.4. Objetivos y estructura del trabajo	5
2. Modelo matemático	7
2.1. Consideraciones geométricas	7
2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes	8
2.3. Gradiente de presión sobre un ducto curvo	9
2.4. Adimensionalización de las ecuaciones	10
2.5. Ecuaciones promediadas	12
2.6. Conservación de la energía cinética turbulenta	13
3. Modelo numérico	17
3.1. Simulación directa de turbulencia	17
3.2. Código de cálculo	18
3.2.1. Geometría	18
3.2.2. Método de paso fraccionado	19

3.2.3. Discretización temporal	19
3.2.4. Discretización espacial	22
3.2.5. Condiciones de contorno de la ecuación de Helmholtz	24
3.3. Procesamiento de los datos	25
4. Validación del código de cálculo	27
4.1. Flujo Couette laminar	27
4.2. Flujo Dean laminar	28
4.3. Flujo Dean perturbado	31
5. Resultados	33
5.1. Parámetros de las simulaciones	33
5.2. Casos de estudio	35
5.3. Flujo principal	37
5.4. Flujo secundario	42
5.5. Distribución de corte en las paredes	49
5.6. Turbulencia	53
5.6.1. Valores instantáneos	53
5.6.2. Intensidades turbulentas	57
5.6.3. Esfuerzos de Reynolds	63
5.6.4. Balance de energía cinética turbulenta	69
5.7. Flujo en ductos de bajo radio	76
5.8. Balance de momento en la dirección radial	79
5.9. Propiedades globales del flujo	82
6. Conclusiones	85
6.1. Trabajos a futuro	87
A. Apéndice	89
A.1. Derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas	89
A.2. Derivación de las ecuaciones RANS en coordenadas cilíndricas	92
A.3. Cálculos de posprocesamiento	94
A.3.1. Propiedades del valor medio	94
A.3.2. Cálculos de interés en este trabajo	94

Índice de contenidos	vii
Bibliografía	97
Agradecimientos	101

Índice de figuras

1.1. (a) Flujo secundario de primer tipo sobre la curva de un canal abierto [2], (b) flujo secundario de segundo tipo, se muestran las celdas de recirculación sobre la esquina inferior izquierda de un ducto recto de sección cuadrada [3].	2
1.2. Evolución de un meandro en un río, para distintas configuraciones del lecho [4].	2
1.3. (a) Esquema de un reactor <i>CAREM</i> , en amarillo pueden verse los generadores de vapor helicoidales. (b) Esquema de los generadores de vapor [5].	3
2.1. Esquema de la geometría del ducto curvo considerado.	7
4.1. Flujo Couette laminar entre cilindros concéntricos infinitos, con $1 < r < 2$. Se presentan los casos $u_\theta(r = 2) = 5$ y $u_\theta(r = 2) = 10$, comparados con las soluciones analíticas correspondientes.	28
4.2. Velocidad en la dirección del flujo adimensionalizada con la velocidad media, en función del radio, medida a la mitad de la altura de la sección. (a) $De = 125$ y (b) $De = 150$	30
4.3. Vectores de flujo secundario correspondientes a los casos (a) $De = 125$ y (b) $De = 150$. Los colores más claros están asociados con mayores valores del flujo secundario.	30
4.4. Flujo Dean para $De = 125$ a partir de una condición inicial perturbada, obtenida de un cálculo DNS turbulento.	31
5.1. Velocidad media $\overline{u_\theta}$ en función del radio, calculada en $z = 1$ (a) y en $z = 0.25$ (b).	38
5.2. Cociente entre el gradiente de presión y la aceleración centrífuga en función del radio en $z = 1$	39

5.3. Velocidad media $\overline{u_\theta}$ en función de la coordenada vertical, calculada en $\hat{r} = 0.5$ (a) y en $\hat{r} = 1.5$ (b).	40
5.4. Velocidad principal $\overline{u_\theta}$ adimensionalizada con la velocidad media u_b , (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	41
5.5. Vectores de flujo secundario medio, en la mitad superior los mismos tienen módulo unitario, en la mitad inferior están normalizados con el valor máximo de cada una de las secciones, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	43
5.6. Velocidad radial $\overline{u_r}$ adimensionalizada con la velocidad media u_b , (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	45
5.7. Velocidad vertical $\overline{u_z}$ adimensionalizada con la velocidad media u_b , (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	46
5.8. (a) Velocidad $\overline{u_r}$ en función de la coordenada vertical, calculada en $\hat{r} = 1$, (b) Velocidad $\overline{u_z}$ en función del radio, calculada en $z = 1.5$	48
5.9. Magnitud del flujo secundario $\sqrt{\overline{u_r^2} + \overline{u_z^2}}$ adimensionalizada con la velocidad media u_b , (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	50
5.10. Tensión de corte en la dirección del flujo, $\tau_{r\theta}$ en las paredes verticales, (a) izquierda y (b) derecha.	51
5.11. Tensión de corte τ_{rz} en las paredes verticales, (a) izquierda y (b) derecha.	52
5.12. Tensiones de corte en las paredes superior e inferior, (a) $\tau_{z\theta}$ y (b) τ_{rz}	53
5.13. Valores instantáneos del flujo principal, para los casos 10 ((a) y (b)), 50 ((c) y (d)) y 250 ((e) y (f)). Las figuras a), c) y e) corresponden a valores absolutos, mientras que las b), d) y f) corresponden a la diferencia respecto de la media.	55
5.14. Patrones de flujo secundario instantáneo sobre la sección transversal para todos los casos estudiados. A los valores de las velocidades radial y vertical se les restaron sus valores medios para observar los vórtices sin las celdas de recirculación de flujo secundario, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	56
5.15. Valores cuadráticos medios $u_{\theta rms}$, normalizados con la velocidad media al cuadrado de cada caso, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	59

5.16. Valores cuadráticos medios u_{rms} , normalizados con la velocidad media al cuadrado de cada caso, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	60
5.17. Valores cuadráticos medios u_{zrms} , normalizados con la velocidad media al cuadrado de cada caso, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	61
5.18. Valores <i>rms</i> normalizados con la velocidad de corte local media, calculada a la mitad de la altura de la pared ($z = 1$), en el radio interior (mitad izquierda) y en el radio exterior (mitad derecha), (a) $u_{\theta rms}$, (b) u_{rms} , (c) u_{zrms}	63
5.19. Componente del tensor de <i>Reynolds</i> $\overline{u'_r u'_\theta}$, normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	66
5.20. Componente del tensor de <i>Reynolds</i> $\overline{u'_z u'_\theta}$, normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	67
5.21. Componente del tensor de <i>Reynolds</i> $\overline{u'_r u'_z}$, normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	68
5.22. Valores de energía cinética turbulenta, \mathcal{K} , normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	70
5.23. Producción de energía cinética turbulenta, \mathcal{P} , normalizada con $u_{\tau,avg}^3$, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	72
5.24. Disipación viscosa de energía cinética turbulenta, normalizada con $u_{\tau,avg}^3$, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$	74
5.25. Valores de \mathcal{K} (a), \mathcal{P} (b) y ϵ (c) normalizados con la velocidad de corte local en el radio interior (mitad izquierda) y en el radio exterior (mitad derecha).	75
5.26. Resultados del flujo medio para el caso $R_m = 5$. (a) $\overline{u_\theta}$, (b) $\overline{u_r}$, (c) $\overline{u_z}$, (d) $\sqrt{\overline{u_r^2} + \overline{u_z^2}}$ (valores normalizados con u_b), (e) Vectores de flujo secundario, de módulo unitario en la mitad superior, y normalizados con el valor máximo en la mitad inferior.	77
5.27. Contornos de \mathcal{K} (a) y \mathcal{P} (b) para el caso $R_m = 5$, utilizando como escala la velocidad de corte promedio.	79

5.28. Principales términos de la ecuación promediada de momento lineal en la dirección radial, (a) $R_m = 5$, (b) $R_m = 10$, (c) $R_m = 30$, (d) $R_m = 100$.	80
5.29. Diferencia entre los términos de gradiente de presión y aceleración centrífuga, se muestran también los otros términos no nulos, (a) Caso 5, (b) Caso 10, (c) Caso 30, (d) Caso 100.	81
5.30. Factor de fricción de <i>Darcy</i> en función del radio medio (a) y del número de Dean. Se muestran también los factores predichos por la correlación de <i>Ito</i> [25] para ductos circulares.	83
5.31. Energía cinética turbulenta promedio en la sección, en función del radio medio (a) y del número de Dean.	84
A.1. Volumen de control diferencial sometido a tensiones normales y de corte, en coordenadas cilíndricas.	90

Índice de tablas

4.1. Grillas utilizadas para las simulaciones del flujo Dean laminar.	29
5.1. Casos analizados en el presente trabajo. R_m es el radio medio de curvatura adimensionalizado con el semiancho del ducto h , u_b es la velocidad media en la dirección del flujo, $Re_b = u_b h / \nu$ es el número de <i>Reynolds</i> basado en la velocidad media, De es el número de <i>Dean</i> , $\overline{u_{\theta}}_{máx}$ es el valor máximo que alcanza la velocidad principal, el cual ocurre para un radio $\hat{r}_{u_{máx}}$	36
5.2. Comparación entre los valores de Re_b de los casos de estudio y los valores críticos para ductos curvos circulares de diámetro $2h$, según los estudios de <i>Ito</i> [25]; cabe aclarar que los valores de Re_b se encuentran calculados considerando el semiancho h	37
5.3. Máximo valor del flujo secundario como un porcentaje de la magnitud del flujo medio principal, para cada caso simulado.	49
5.4. Propiedades globales del flujo para el caso 5.	78

Resumen

Los flujos secundarios son aquellos que aparecen en planos transversales a la dirección principal del flujo, usualmente en fenómenos que involucran canales abiertos o conductos. Estos flujos tienen una magnitud relativa menor al flujo principal, y modifican la configuración del mismo. Es posible diferenciar flujos secundarios de dos naturalezas distintas. Los flujos secundarios de primer tipo se dan por la curvatura de los vectores vorticidad media, en el flujo en ductos curvos, y pueden aparecer tanto en régimen laminar como en régimen turbulento. Por el contrario, los flujos secundarios de segundo tipo aparecen únicamente en presencia de turbulencia, en flujos internos como los que involucran ductos de sección cuadrada.

Existen numerosas aplicaciones tecnológicas y fenómenos naturales en los que la presencia de flujos secundarios tiene implicancias importantes. Se puede nombrar, por ejemplo, la modificación del lecho en los meandros de los ríos, o bien el uso de generadores de vapor helicoidales en la industria nuclear.

Se busca en este trabajo realizar simulaciones directas de turbulencia en un ducto curvo de sección transversal cuadrada, para estudiar la interacción de los flujos secundarios de primer y segundo tipo. En este caso el flujo es forzado por un gradiente de presión que resulta homogéneo sobre la sección transversal.

El código de cálculo utilizado se desarrolló a partir de la adaptación de un código ya existente, validado y utilizado para realizar simulaciones en un ducto recto de sección cuadrada. Se identificaron e implementaron los cambios necesarios para representar el problema en coordenadas cilíndricas. Se utilizó un código de cálculo pseudo-espectral que utiliza expansiones de *Fourier* en la dirección principal, y expansiones de *Chebyshev* en las direcciones restantes.

Se estudia la influencia del radio medio de curvatura sobre el flujo medio y el flujo secundario, y se realiza un estudio de las modificaciones que el flujo secundario introduce en el patrón de flujo medio. Se estudian también las distribuciones de corte en las paredes del ducto, las intensidades turbulentas, la distribución de esfuerzos de *Reynolds* sobre la sección, y el balance de energía cinética turbulenta.

Se analiza también el flujo en ductos de bajo radio y se observa la aparición de flujos

secundarios producidos por inestabilidades centrífugas. En este contexto se hace un análisis del balance de momento lineal con el objetivo de entender el origen de estos flujos secundarios.

Finalmente se muestran una serie de resultados globales del flujo para distintos radios de curvatura, con el objetivo de caracterizar propiedades de interés en ingeniería, tales como el factor de fricción y el mezclado turbulento.

Palabras clave: FLUJOS SECUNDARIOS, SIMULACIÓN DIRECTA DE TURBULENCIA, TURBULENCIA, DUCTOS CURVOS, FLUIDODINÁMICA COMPUTACIONAL

Abstract

Secondary flows appear in the transversal plane of the direction of the main flow, usually in open channels or ducts. These flows have a magnitude which is substantially lower than the main flow and therefore tend to modify its configuration. There are two different kind of secondary flows, which have different nature. The secondary flows of the first kind are a consequence of the curvature of the mean vorticity vectors, in the presence of a curved duct, and can appear in both laminar and turbulent regimes. Secondary flows of the second kind appear only in the presence of turbulence, in internal flows such as those involving ducts of square cross section.

There is a large number of technological applications and natural phenomena in which the secondary flows have important implications. We can name, for example, the modification in the bed of meanders of some rivers or the use of helical coil steam generators in the nuclear industry.

The aim of this work is to perform direct numerical simulations in a curved square cross sectional duct, in order to study the interaction between the secondary flows of first and second kind. In this study, the flow is forced by a pressure gradient that is homogeneous in the cross section.

The used computational code is based on the adaptation of an existing code, validated and used to perform simulations in a square straight duct. The necessary changes to represent the problem in cylindrical coordinates were identified and implemented. A pseudo-spectral code that uses *Fourier* expansions in the main direction, and *Chebyshev* expansions in the remaining directions is considered.

The influence of the mean curvature radius on the mean flow and the secondary flow is studied. In addition, the influence over the mean flow pattern induced by the existence of the secondary flow is also investigated. The shear stress distributions in the walls, the turbulent intensities, the Reynolds stresses on the section, and the turbulent kinetic energy budget are also studied.

The flow in ducts of low curvature radius is also analyzed and the appearance of secondary flows produced by centrifugal instability phenomenon is observed. In order to understand the origin of these secondary flows, an analysis of the linear momentum

balance is made.

Finally, a set of global flow results for different radii of curvature are shown, in order to characterize properties of interest in engineering, such as the friction factor and turbulent mixing.

Keywords: SECONDARY FLOWS, DIRECT NUMERICAL SIMULATION, TURBULENCE, CURVED DUCTS, COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

Capítulo 1

Introducción

1.1. Flujo secundario

Los flujos secundarios son aquellos que aparecen en planos transversales a la dirección principal del flujo, usualmente en fenómenos que involucran canales abiertos o ductos de diversas características. Estos flujos tienen una magnitud relativa menor al flujo principal, y modifican la configuración del mismo, incidiendo directamente sobre varias de sus características hidrodinámicas.

Es posible identificar flujos secundarios de dos naturalezas distintas. Si se considera un canal abierto, por ejemplo, existen vectores de vorticidad media transversales al flujo principal, ocasionados por los gradientes de velocidad en las paredes, que son transportados materialmente en la dirección del flujo. Al encontrarse con una curva, las regiones del flujo de la zona interior se aceleran más que las de la zona exterior generando un desplazamiento angular relativo entre los vectores de vorticidad y la dirección del flujo medio, que tiene como resultado la aparición de una componente de vorticidad en la dirección del flujo. Como consecuencia, aparece sobre la sección transversal una circulación de fluido, desde el radio exterior al interior por el fondo del canal, y en sentido contrario por la superficie del mismo, como puede verse en la figura 1.1a. Este fenómeno se conoce como flujo secundario de primer tipo y puede darse tanto en regímenes laminares como turbulentos, ya que depende únicamente de la curvatura del ducto o canal [1].

El otro tipo de flujo secundario se da exclusivamente en presencia de turbulencia, y se lo clasifica como de segundo tipo para diferenciarlo del anterior. Si se considera el flujo en un ducto recto de sección cuadrada, en régimen turbulento, aparecen dos celdas de recirculación en cada vértice, que resultan simétricas respecto a las bisectrices de los mismos. Estos vórtices transfieren fluido desde el centro del ducto hacia los vértices, y desde los vértices hacia las bisectrices de las paredes. Estos flujos secundarios son

consecuencia de la presencia de gradientes de los esfuerzos de *Reynolds* en conductos de sección transversal no circular [1], que generan una producción turbulenta de vorticidad de forma local en los vértices. En la figura 1.1b se esquematiza este fenómeno.

Es importante aclarar que mientras que el flujo secundario de primer tipo puede alcanzar valores del 20 % del flujo principal, el de segundo tipo es menos importante, y puede alcanzar valores de aproximadamente del 2 % de este.

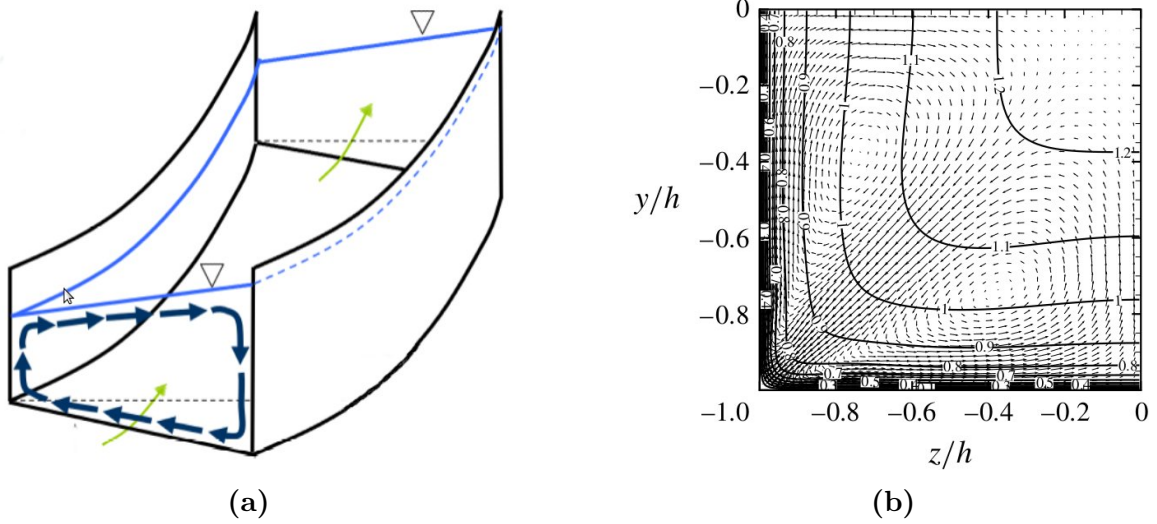


Figura 1.1: (a) Flujo secundario de primer tipo sobre la curva de un canal abierto [2], (b) flujo secundario de segundo tipo, se muestran las celdas de recirculación sobre la esquina inferior izquierda de un ducto recto de sección cuadrada [3].

Existen numerosas aplicaciones tecnológicas y fenómenos naturales en los que la presencia de flujos secundarios tiene implicancias importantes. En los meandros de los ríos, por ejemplo, el flujo secundario de primer tipo produce una circulación hacia la margen interna por el fondo, generando la erosión de la margen externa y la deposición de sedimentos en la margen interna, como consecuencia de la distribución de esfuerzos de corte sobre la sección transversal. Este fenómeno de transporte de sedimentos depende de la forma del lecho de los ríos, como puede verse en la figura 1.2.

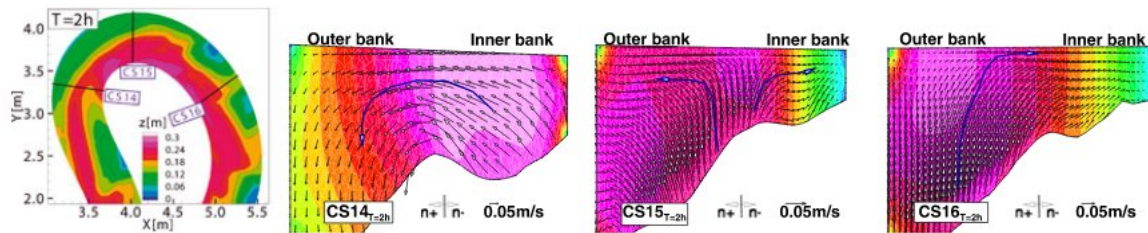


Figura 1.2: Evolución de un meandro en un río, para distintas configuraciones del lecho [4].

Un ejemplo de una aplicación de ingeniería en la que los flujos secundarios son impor-

tantes es el caso de los intercambiadores de calor helicoidales, tales como los generadores de vapor de un reactor nuclear tipo *CAREM*, en los que el agua refrigerante del primario circula por el exterior de un conjunto de tubos helicoidales por los que circula el secundario. En el caso del secundario, se tiene líquido a la entrada del generador de vapor y se busca obtener vapor sobrecalentado a la salida, por lo que en gran parte de su operación existe un flujo bifásico. Existen dos fenómenos de importancia técnica en este tipo de aplicaciones; la primera es la estratificación del flujo por acción de la fuerza centrífuga debido a la presencia de dos fases, y la segunda es la modificación del flujo y del mezclado turbulento por acción del flujo secundario. Esta última incide directamente sobre la transferencia de calor, y por ende sobre el rendimiento termodinámico del generador de vapor, en particular en la zona monofásica. En la figura 1.3 se muestra un esquema de un reactor tipo *CAREM* y de los generadores de vapor.

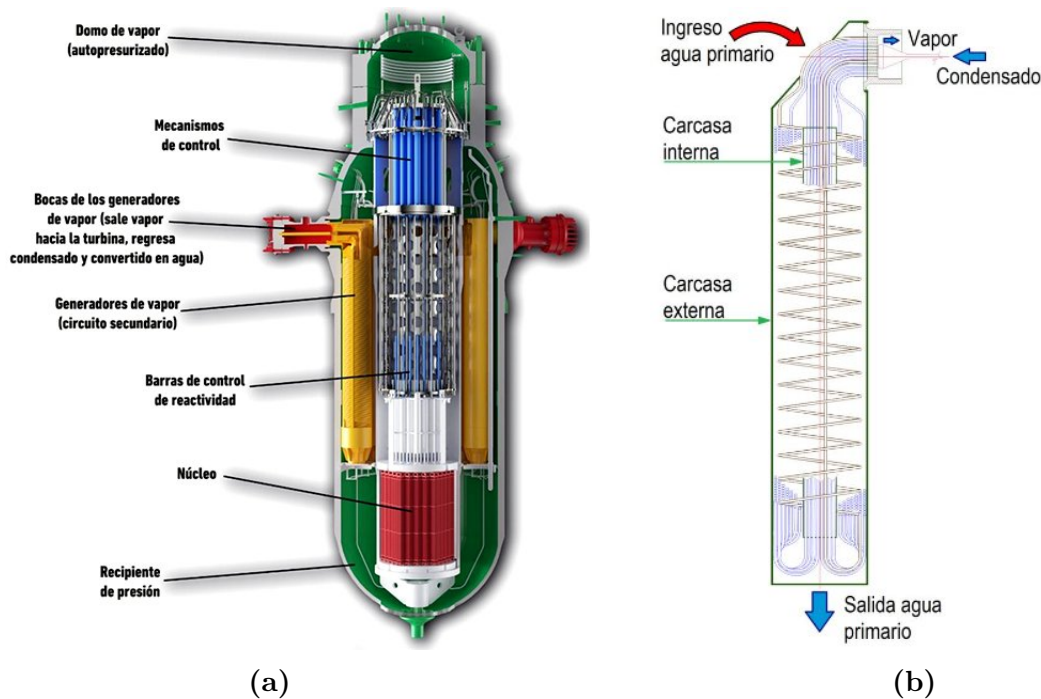


Figura 1.3: (a) Esquema de un reactor *CAREM*, en amarillo pueden verse los generadores de vapor helicoidales. (b) Esquema de los generadores de vapor [5].

1.2. Inestabilidades por ondas de densidad

La utilización de ductos curvos en generadores de vapor helicoidales es de especial interés, debido a una alta eficiencia en la transferencia de calor y una estructura compacta. No obstante, existen fenómenos que pueden afectar la estabilidad termohidráulica de este tipo de dispositivos, entre los cuales se encuentran las oscilaciones por ondas de densidad [5].

En un flujo en estado líquido, asumiendo despreciables las variaciones de densidad,

las únicas perturbaciones que pueden afectar a la ecuación de momento se deben a la presión y puede considerarse que se propagan inmediatamente aguas abajo. En régimen de ebullición, las perturbaciones que provocan cambios de densidad se propagan a la velocidad del flujo, propagándose aguas abajo con un retardo intrínseco.

Si se tiene un generador de vapor con una porción del mismo en fase líquida y otra en ebullición, las perturbaciones que aparezcan sobre el líquido viajarán aguas abajo, y se producirá entonces un retardo asociado a este fenómeno en la región de dos fases. Al ser un circuito cerrado, estas perturbaciones se pueden manifestar en la entrada del ducto, y dependiendo del desfase y la amplitud de las mismas, puede ocurrir una amplificación inestable de estas oscilaciones [6].

Una posible solución a este problema es introducir una pérdida de carga en la entrada del generador de vapor, en fase líquida, con el objetivo de atenuar las inestabilidades generadas. La pérdida de carga en ductos curvos no puede estimarse utilizando correlaciones de ductos rectos debido a que la presencia de flujos secundarios produce una modificación y un incremento en las tensiones de corte sobre las paredes, incrementando el factor de fricción, por lo que es necesario una correcta caracterización del fenómeno para realizar potenciales optimizaciones de diseño para este tipo de aplicaciones.

1.3. Estado del arte

En este trabajo se estudian los flujos secundarios, tanto de primer como de segundo tipo, que se dan en ductos curvos en régimen turbulento. El estudio teórico del desarrollo de flujos laminares en esta geometría data del año 1928 [7]; en ese trabajo se estudian los parámetros adimensionales que gobiernan el comportamiento del flujo, el desarrollo de flujos secundarios de primer tipo y la estabilidad de los mismos. En los estudios [8], [9] y [10] se realizan simulaciones numéricas, así como también experimentos en régimen laminar para estudiar este fenómeno. En ellos se muestra la aparición de dos vórtices contrarrotantes sobre la sección transversal de un ducto rectangular, y se verifica la aparición de fenómenos de inestabilidad centrífuga para algunas condiciones de flujo. En el trabajo [11] se realizan experimentos para estudiar la longitud de desarrollo de un flujo laminar sobre un ducto curvo a partir de un perfil de velocidad homogéneo a la entrada.

Por otro lado, existen trabajos que analizan mediante cálculos DNS (simulación directa de turbulencia) el desarrollo de flujos secundarios de segundo tipo sobre ductos rectos de sección cuadrada [12], así como también la influencia del número de *Reynolds* [13] y de la relación de aspecto de la sección [14] sobre el flujo medio. En estos se realizan simulaciones para números de *Reynolds* moderados, debido al costo computacional de los cálculos DNS.

Respecto a ductos curvos de sección cuadrada, pueden nombrarse los trabajos [15] y [16] en los cuales se realizan cálculos LES (simulaciones de grandes vórtices) para flujos incompresibles en el primer caso y compresibles en el segundo, con el objetivo de estudiar la influencia del radio de curvatura sobre el flujo medio y la transferencia de calor. En estos estudios se analiza una porción de ducto de baja amplitud angular, por lo que los fenómenos de desarrollo hidrodinámico también resultan importantes.

Existen también algunos estudios numéricos en ductos de sección transversal circular. En el trabajo [17] se utilizan simulaciones DNS en ductos toroidales y helicoidales para analizar la influencia del radio de curvatura y de la torsión sobre el flujo medio y sobre el desarrollo de la turbulencia. Otro estudio similar, en el que se analizan también flujos laminares y en régimen de transición es [18]; en este último se analiza también la transferencia de calor en distintos regímenes, para varios radios de curvatura.

1.4. Objetivos y estructura del trabajo

El presente trabajo se encuentra motivado por el estudio de *Martorana* [19], en el cual se utilizan simulaciones DNS para estudiar el flujo en ductos rectos de sección cuadrada sometidos a gradientes de presión no homogéneos; de esta forma se busca aislar el efecto macroscópico del fenómeno de estratificación de la densidad. En este trabajo se busca implementar un código de cálculo para realizar simulaciones DNS en coordenadas cilíndricas, a partir de la modificación de un código validado, que permite simular flujos sobre ductos rectos.

Se propone partir de la herramienta existente, identificar los cambios necesarios para modelar correctamente el problema en el nuevo sistema de coordenadas, implementar los cambios y realizar una validación con casos existentes en la bibliografía.

Al considerar ductos curvos, además de la aparición de flujos secundarios, existen también modificaciones en el flujo por acción de la fuerza centrífuga. Se busca entonces estudiar los efectos que los flujos secundarios y la acción centrífuga tienen sobre la modificación del flujo medio principal, la distribución de corte en las paredes y las principales características de la turbulencia. Se consideran casos en los que el forzado resulta homogéneo sobre la sección transversal, debido a que el objetivo principal es analizar la influencia del radio medio de curvatura del ducto sobre las magnitudes anteriores. A causa del costo computacional de las simulaciones realizadas, y de los tiempos de este proyecto, no resulta posible realizar un estudio paramétrico de forzados no homogéneos y diversos radios medios de curvatura en paralelo.

Las simulaciones se llevan a cabo utilizando un código de cálculo pseudo-espectral, que utiliza expansiones de *Fourier* en la dirección angular y expansiones de *Chebyshev* en las direcciones restantes.

El trabajo se encuentra ordenado en 6 capítulos. El capítulo 2 introduce las ecuaciones fundamentales que conforman el modelo matemático utilizado, así como también la adimensionalización del mismo, las ecuaciones de conservación promediadas (RANS), y la ecuación de conservación de energía cinética turbulenta, estas últimas en coordenadas cilíndricas. El capítulo 3 trata sobre el modelo numérico, y detalla el funcionamiento del método numérico empleado, así como también las discretizaciones espaciales y temporales utilizadas. El capítulo 4 contiene las validaciones realizadas sobre la implementación del código.

Finalmente, el capítulo 5 contiene todos los resultados encontrados, junto con la interpretación de los mismos. El capítulo 6 resume las conclusiones obtenidas de este trabajo.

Capítulo 2

Modelo matemático

En el presente capítulo se detalla el modelo matemático considerado. Se describe inicialmente la geometría en la que se busca estudiar el flujo, y luego se presentan las ecuaciones de conservación de masa y momento lineal. Se realiza también un balance integral de momento lineal para analizar el forzado impuesto sobre el flujo. Finalmente se presentan las ecuaciones de conservación de momento lineal promediadas, y la ecuación de conservación de energía cinética turbulenta.

2.1. Consideraciones geométricas

El objetivo de este trabajo es realizar simulaciones y analizar la turbulencia en un ducto curvo de sección transversal cuadrada. En la figura 2.1 se muestra un esquema de un ducto con la geometría considerada.

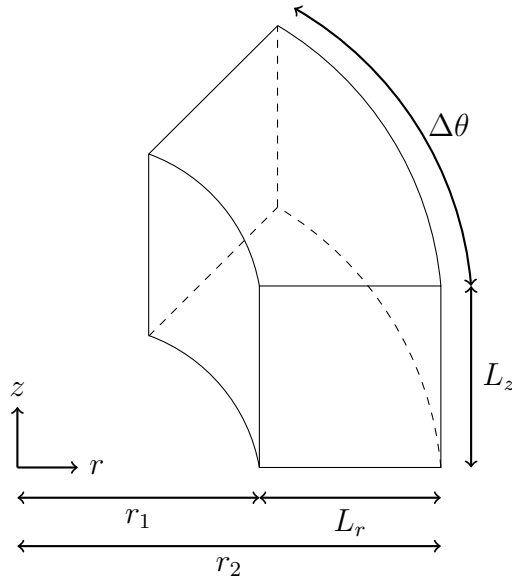


Figura 2.1: Esquema de la geometría del ducto curvo considerado.

Sea $\Omega := \{\mathbf{r} = (r, \theta, z) \in [r_1, r_2] \times [0, \Delta\theta] \times [0, L_z]\}$, el dominio que se va a analizar, representado en coordenadas cilíndricas. Además se define $L_r = (r_2 - r_1)$, el ancho de la sección transversal, y $R_m = (r_1 + r_2)/2$, el radio medio de curvatura del ducto. Al considerarse una sección cuadrada, resulta $L_r = L_z = 2h$, donde h es el semi ancho de la sección.

Utilizando la geometría indicada, el flujo correspondiente a la dirección angular θ resulta ser el flujo principal, mientras que las componentes del flujo en las direcciones radial (r) y vertical (z) son las correspondientes al flujo secundario.

2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

Sea $\mathbf{u} = (u_r(\mathbf{r}, t), u_\theta(\mathbf{r}, t), u_z(\mathbf{r}, t))$ el campo de velocidades instantáneo, expresado en coordenadas cilíndricas. Considerando un fluido incompresible, la ecuación de conservación de masa en este sistema de referencia se puede escribir como [20]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2.1)$$

Además, en ausencia de fuerzas volumétricas, la ecuación diferencial de conservación del momento lineal puede escribirse de la siguiente forma

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f}, \quad (2.2)$$

donde $\underline{\underline{\sigma}}$ es el tensor de tensiones, ρ es la densidad (constante) y \mathbf{f} es un término de producción de momento lineal externo al flujo.

Se considera ahora un fluido de *Newton-Stokes* incompresible, caracterizado por la ecuación constitutiva,

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (2.3)$$

donde $\underline{\underline{I}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz identidad, p es la presión y μ es la viscosidad dinámica del fluido.

Para obtener una forma útil de esta ecuación diferencial resulta necesario calcular la derivada material del campo de velocidades, considerando también la derivada de la terna de versores $S := \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$, además del gradiente del campo de velocidades y la correspondiente divergencia del tensor $\underline{\underline{\sigma}}$. Los detalles de estos cálculos se muestran en el apéndice A.1.

A continuación se muestra el resultado final, considerando además que el término de producción tiene la forma $\mathbf{f} = (0, f_\theta, 0)$ que implica la imposición de una fuerza externa en la dirección del flujo:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \frac{f_\theta}{\rho}, \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z, \quad (2.4c)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática. Puede verse que las ecuaciones no pueden escribirse en notación indicial debido a que existen términos propios para cada una de las ecuaciones; estos términos derivan esencialmente de la representación del modelo en un sistema de referencia no inercial. Además, se utilizan los operadores usuales en coordenadas cilíndricas [20]

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.5a)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.5b)$$

Las ecuaciones (2.4), junto con la ecuación de continuidad (2.1), son conocidas como las ecuaciones de *Navier-Stokes* en coordenadas cilíndricas y conforman el modelo matemático del flujo de un fluido incompresible sobre un dominio representado en este sistema de referencia.

2.3. Gradiente de presión sobre un ducto curvo

Considerando la geometría dada por la figura 2.1, se busca ahora obtener la expresión para el forzado en la dirección del flujo, f_θ . Para ello se realiza un balance integral de momento lineal en la dirección angular (θ), sobre un volumen de control coincidente con esta geometría

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u_\theta d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho u_\theta (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dS = \sum F_{fricción} + \sum F_{presión} = 0. \quad (2.6)$$

Debido a que se considera un flujo estadísticamente estacionario, los términos integrales de la ecuación (2.6) se anulan idénticamente, y el balance de momento lineal se reduce a un equilibrio de fuerzas de presión y de fricción, sobre las secciones transversales a la dirección del flujo y sobre las paredes del dominio respectivamente, es decir

$$(P_2 - P_1)L_r L_z = -\bar{\tau}_w r_1 \Delta\theta L_z - \bar{\tau}_w r_2 \Delta\theta L_z - 2\bar{\tau}_w \frac{\Delta\theta}{2} (r_2^2 - r_1^2), \quad (2.7)$$

donde $\bar{\tau}_w$ es la tensión de corte media en las paredes. El primer y segundo término del lado derecho de la ecuación (2.7) corresponden a la tensión de corte en las paredes curvas, interna y externa, respectivamente, mientras que el tercer término del lado derecho corresponde a la tensión de corte en las paredes superior e inferior. Considerando la definición de radio medio dada en la sección 2.1 y teniendo en cuenta que $L_r = L_z = 2h$, puede reescribirse esta relación como

$$-\frac{1}{R_m} \frac{P_2 - P_1}{\Delta\theta} = -\frac{1}{R_m} \frac{dP}{d\theta} = \frac{2}{h} \tau_w = f_\theta. \quad (2.8)$$

Este término de producción de momento f resulta ser justamente el forzado externo impuesto sobre el volumen de control, necesario para establecer un flujo estadísticamente estacionario. Cabe aclarar que no es necesario que el forzado resulte uniforme sobre la sección; si f_{rz} es la distribución de esta acción externa sobre la sección por unidad de área, la condición necesaria es

$$f = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{L_z} f_{rz}(r, z) dz dr. \quad (2.9)$$

2.4. Adimensionalización de las ecuaciones

A continuación se presenta la derivación de la forma adimensional de las ecuaciones (2.4), la cual resulta de utilidad a la hora de implementar su resolución numérica, debido a que permite identificar los parámetros adimensionales que pueden seleccionarse y variarse en cada una de las simulaciones. Sean L y U una longitud y una velocidad características del problema, se definen entonces las siguientes magnitudes adimensionales

$$\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}, \theta, \tilde{z}) = \left(\frac{r}{L}, \theta, \frac{z}{L} \right),$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z) = \left(\frac{u_r}{U}, \frac{u_\theta}{U}, \frac{u_z}{U} \right),$$

$$\tilde{t} = \frac{t U}{L},$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}.$$

Reemplazando estas variables en las ecuaciones de *Navier-Stokes* y luego multiplicando por L/U^2 se obtiene

$$\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{t}} + \tilde{A}_r(\tilde{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\nu}{UL} \tilde{D}_r(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{t}} + \tilde{A}_\theta(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{\nu}{UL} \tilde{D}_\theta(\tilde{\mathbf{u}}) - \frac{L}{\rho r_m U^2} \frac{dP}{d\theta}, \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{t}} + \tilde{A}_z(\tilde{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\nu}{UL} \tilde{D}_z(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (2.10c)$$

donde \tilde{A}_i representa el término advectivo adimensional, mientras que \tilde{D}_i representa el término difusivo adimensional, con $i \in \{r, \theta, z\}$. Se considera ahora como escala U a la velocidad de corte promedio definida por $u_{\tau,avg}^2 = \bar{\tau}_w/\rho$, y como escala L se utiliza el semi ancho del ducto, h . Además, se define el número de *Reynolds* basado en la velocidad característica, $Re_\tau = (u_{\tau,avg} h)/\nu$. Utilizando estas definiciones, el último término del lado derecho de la ecuación (2.10b) puede reescribirse como

$$\frac{h}{\rho R_m u_{\tau,avg}^2} \frac{dP}{d\theta} = \frac{h}{R_m \bar{\tau}_w} \frac{dP}{d\theta} = 2, \quad (2.11)$$

donde se ha usado la relación dada por la ecuación (2.8) en la última igualdad. La forma adimensional de la ecuación de *Navier-Stokes* en coordenadas cilíndricas resulta entonces

$$\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{t}} + \tilde{A}_r(\tilde{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{Re_\tau} \tilde{D}_r(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (2.12a)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{t}} + \tilde{A}_\theta(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re_\tau} \tilde{D}_\theta(\tilde{\mathbf{u}}) - 2, \quad (2.12b)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{t}} + \tilde{A}_z(\tilde{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{Re_\tau} \tilde{D}_z(\tilde{\mathbf{u}}). \quad (2.12c)$$

Al observar las ecuaciones (2.12) se puede comprender la utilidad de la escala de velocidad seleccionada. El término del forzado en la dirección del flujo, es decir la fuerza impulsora del mismo, resulta ser igual a una constante. Esto significa que para distintas simulaciones, con distintos valores de los parámetros del problema, la fuerza impulsora a la que se encuentra sometido el flujo resulta ser la misma.

Cabe aclarar que la adimensionalización de la ecuación de conservación de masa resulta trivial a partir de las definiciones anteriores

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0. \quad (2.13)$$

Finalmente, la geometría adimensional considerada puede expresarse como $\tilde{\Omega} = \{\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}, \theta, \tilde{z}) \in [\tilde{r}_1, \tilde{r}_1 + 2] \times [0, \Delta\theta] \times [0, 2]\}$.

En las secciones y capítulos posteriores se excluyen los tildes indicativos de las magnitudes adimensionales para simplificar la notación, pero es importante aclarar que todas las variables consideradas se encuentran adimensionalizadas.

2.5. Ecuaciones promediadas

En el presente trabajo se busca caracterizar flujos secundarios existentes en ductos curvos. Tal objetivo implica el estudio de los patrones del flujo, así como también de distintas características de la turbulencia. Los flujos turbulentos son inherentemente irregulares e impredecibles, es decir que cualquier propiedad del flujo en un punto interior del dominio presenta variaciones temporales continuas, por lo que los valores instantáneos de dichas propiedades resultan de poca utilidad práctica [21]. Esto implica que para poder estudiar la turbulencia es necesario recurrir a herramientas estadísticas, tales como el cálculo de promedios, valores cuadráticos medios, etc.

Si consideramos que el flujo estudiado es estadísticamente estacionario, el valor de una magnitud (por ejemplo, la velocidad) en un punto del dominio será fluctuante con el tiempo, pero su valor medio temporal será constante. Esto permite definir el promedio temporal de la siguiente forma [21]

$$\overline{\mathbf{u}^t}(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (2.14)$$

Existe otro tipo de promediado que puede asociarse a los casos de turbulencia homogénea. Se dice que la turbulencia es homogénea en una dirección cuando la estadística del flujo resulta independiente de esta dirección; esto implica que para un desplazamiento \mathbf{R} sobre la dirección homogénea, $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) \forall \mathbf{R}$.

Esta situación permite definir un promediado espacial; suponiendo que la dirección homogénea sea la j -ésima, con $j \in \{r, \theta, z\}$ en el caso analizado, tal promedio sería [21]

$$\overline{\mathbf{u}^e}(i \neq j, t) = \frac{1}{L_j} \int_0^{L_j} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) dj. \quad (2.15)$$

Sea entonces $\overline{\mathbf{u}} = (\overline{u_r}, \overline{u_\theta}, \overline{u_z})$ el resultado del promedio temporal y espacial adecuado

del campo del campo de velocidades \mathbf{u} para un problema particular, se puede escribir a los valores instantáneos de la velocidad como una contribución del valor medio más una perturbación respecto a este último $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ (la dependencia funcional del valor medio dependerá del promedio considerado); cabe aclarar que la misma descomposición se puede aplicar para la presión [21].

Se busca obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales para el valor medio del campo de velocidades, introduciendo esta definición en la ecuación (2.4) y promediando los términos. El proceso detallado se muestra en el apéndice A.2; a continuación se indica el resultado obtenido

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{u}_r - \frac{\bar{u}_\theta^2}{r} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{1}{Re_\tau} \left(\nabla^2 \bar{u}_r - \frac{\bar{u}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r'^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_r' u_\theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_r' u_z'} - \frac{\bar{u}_r'^2}{r} + \frac{\bar{u}_\theta'^2}{r}, \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{u}_\theta + \frac{\bar{u}_\theta \bar{u}_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re_\tau} \left(\nabla^2 \bar{u}_\theta - \frac{\bar{u}_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r' u_\theta'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_\theta'^2} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_\theta' u_z'} - 2 \frac{\bar{u}_r' \bar{u}_\theta'}{r}, \end{aligned} \quad (2.16b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{u}_z = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re_\tau} (\nabla^2 \bar{u}_z) - \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r' u_z'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_\theta' u_z'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_z'^2} - \frac{\bar{u}_z' \bar{u}_r'}{r}. \end{aligned} \quad (2.16c)$$

Las cantidades $-\overline{u_r'^2}$, $-\overline{u_r' u_\theta'}$, $-\overline{u_r' u_z'}$, $-\overline{u_\theta' u_r'}$, $-\overline{u_\theta'^2}$, $-\overline{u_\theta' u_z'}$, $-\overline{u_z' u_r'}$, $-\overline{u_z' u_\theta'}$ y $-\overline{u_z'^2}$ son componentes del llamado *Tensor de Reynolds*, y pueden interpretarse como tensiones de corte adicionales a las tensiones de naturaleza viscosa, actuando sobre el flujo medio. La contribución de los esfuerzos de Reynolds a la tensión de corte neta suele ser mucho mayor que la contribución de los esfuerzos de corte viscosos, salvo en regiones muy cercanas a las fronteras, o paredes del dominio.

2.6. Conservación de la energía cinética turbulenta

La energía cinética turbulenta (TKE, por su sigla en inglés) se define como [20]

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}, \quad (2.17)$$

donde $i \in \{r, \theta, z\}$. La ecuación de conservación para esta cantidad puede obtenerse multiplicando la ecuación (2.12a) por u_r , la ecuación (2.12b) por u_θ y la ecuación (2.12c)

por u_z , promediando las tres ecuaciones y sumándolas, mediante un procedimiento similar al comentado en el apéndice A.2. El resultado es

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{K} = \mathcal{P} + \mathcal{T}_t + \mathcal{T}_p + \mathcal{T}_v + \mathcal{T}_c - \epsilon, \quad (2.18)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = - & \left[\overline{u_r'^2} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \frac{\overline{u_r' u_\theta'}}{r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \theta} + \overline{u_r' u_z'} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial z} + \overline{u_r' u_\theta'} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial r} + \right. \\ & \left. \frac{\overline{u_\theta'^2}}{r} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial \theta} + \overline{u_\theta' u_z'} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial z} + \overline{u_r' u_z'} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial r} + \frac{\overline{u_z' u_\theta'}}{r} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial \theta} + \overline{u_z'^2} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t = - & \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \overline{u_r'^3} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \overline{u_r'^2 u_\theta'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \overline{u_r'^2 u_z'} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \overline{u_\theta'^2 u_r'} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \overline{u_\theta'^3} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \overline{u_\theta'^2 u_z'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \overline{u_z'^2 u_r'} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \overline{u_z'^2 u_\theta'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \overline{u_z'^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\overline{u_r'^3}}{r} + \frac{1}{2} \frac{\overline{u_\theta'^2 u_r'}}{r} + \frac{1}{2} \frac{\overline{u_z'^2 u_r'}}{r} \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\mathcal{T}_p = \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u_r' p'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{u_\theta' p'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u_z' p'}) - \frac{\overline{u_r' p'}}{r}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_v = \frac{1}{Re} & \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(2 \overline{u_r' \left(\frac{\partial u_r'}{\partial r} \right)} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\overline{u_r' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r'}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta'}{\partial r} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u_r' \left(\frac{\partial u_r'}{\partial z} + \frac{\partial u_z'}{\partial r} \right)} \right) + \right. \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left(\overline{u_\theta' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r'}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta'}{\partial r} \right)} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\overline{2 u_\theta' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta'}{\partial \theta} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u_\theta' \left(\frac{\partial u_\theta'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z'}{\partial \theta} \right)} \right) \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left(\overline{u_z' \left(\frac{\partial u_r'}{\partial r} + \frac{\partial u_r'}{\partial z} \right)} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\overline{u_z' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z'}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta'}{\partial z} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{2 u_z' \left(\frac{\partial u_z'}{\partial z} \right)} \right) \\ & \frac{2}{r} \overline{u_r' \frac{\partial u_r'}{\partial r}} - \frac{1}{r^2} \overline{u_r' \frac{\partial u_\theta'}{\partial \theta}} - \frac{1}{r^2} \overline{u_r' u_r'} + \frac{2}{r^2} \overline{u_\theta' \frac{\partial u_r'}{\partial \theta}} + \frac{1}{r} \overline{u_\theta' \frac{\partial u_r'}{\partial r}} + \frac{1}{r} \overline{u_z' \frac{\partial u_r'}{\partial r}} + \frac{1}{r} \overline{u_z' \frac{\partial u_r'}{\partial z}} \\ & \left. - \frac{\overline{u_r'^2}}{r^2} - \frac{\overline{u_\theta'^2}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \overline{u_r' \frac{\partial u_\theta'}{\partial \theta}} + \frac{2}{r^2} \overline{u_\theta' \frac{\partial u_r'}{\partial r}} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{T}_c = \frac{2}{r} \overline{u_\theta} \overline{u_r' u_\theta'} - \frac{\overline{u_r u_\theta'^2}}{r} - \frac{\overline{u_\theta} \overline{u_\theta' u_r'}}{r}, \quad (2.23)$$

$$\epsilon = \frac{2}{Re} \overline{s'_{ij} s'_{ij}}. \quad (2.24)$$

Siendo s'_{ij} la componente simétrica del tensor gradiente de velocidad [20], en coordenadas cilíndricas. En esta ecuación, \mathcal{P} es el término de producción de energía cinética turbulenta por interacción de los esfuerzos de *Reynolds* con los gradientes de flujo medio, y se puede interpretar como una transferencia de energía cinética del flujo medio hacia la turbulencia. A su vez, ϵ representa la disipación de \mathcal{K} por esfuerzos viscosos.

Los términos indicados con \mathcal{T} son términos de transporte de \mathcal{K} : \mathcal{T}_t representa el transporte debido a la presencia de la turbulencia, \mathcal{T}_p el transporte por acción de la presión, \mathcal{T}_v el transporte por acción viscosa, y \mathcal{T}_c es el término de contribución al transporte debido a la acción de la fuerza centrífuga, producto de la utilización de coordenadas cilíndricas.

Capítulo 3

Modelo numérico

En este capítulo se detallan las características del modelo numérico utilizado para este trabajo. Se busca realizar simulaciones directas de turbulencia, utilizando un código de cálculo pseudo-espectral. El código implementado se desarrolló realizando modificaciones en un código ya existente para coordenadas rectangulares.

Se comienza el capítulo comentando en qué consiste la realización de simulaciones directas de turbulencia, luego se detalla el código de cálculo utilizado, se identifican los términos de las ecuaciones en coordenadas cilíndricas que resulta necesario implementar y se comenta el tratamiento de estos últimos. Finalmente se comenta sobre el procesamiento realizado a los resultados de las simulaciones, para obtener valores de interés.

3.1. Simulación directa de turbulencia

El estudio de flujos turbulentos usualmente tiene como objetivo obtener modelos cuantitativos que puedan ser utilizados para calcular cantidades de importancia práctica en distintas aplicaciones [21]. Este proceso es de una dificultad notoria y no existe una teoría analítica simple que explique el fenómeno físico, por lo que el enfoque normalmente utilizado es el de simular o modelar los flujos turbulentos de forma computacional, con la esperanza de obtener resultados de utilidad, o bien analizar datos obtenidos de experimentos.

La principal dificultad del estudio de la turbulencia proviene del término convectivo no lineal de las ecuaciones de *Navier-Stokes*. El campo de velocidades instantáneo de un flujo turbulento es tridimensional, dependiente del tiempo y aleatorio, y existe un gran rango de escalas de espaciales y temporales que deben ser resueltas; mientras que las escalas más grandes resultan ser del orden de las longitudes características del problema, las escalas más pequeñas (las escalas disipativas) suelen ser varios órdenes

de magnitud menores.

En este trabajo se utilizan simulaciones DNS (simulación numérica directa, por su sigla en Inglés), las cuales consisten en resolver las ecuaciones de *Navier-Stokes* para el campo de velocidades instantáneo, resolviendo todas las escalas del movimiento. Este enfoque tiene como ventaja que no es necesario imponer un modelo de cierre empírico a la turbulencia, sino que se resuelve el modelo matemático que representa el problema, y los resultados obtenidos responden exclusivamente a la física del mismo.

El principal problema de las simulaciones DNS radica en que resulta necesario utilizar una discretización espacial lo suficientemente fina para poder retener la información de las escalas de longitud más pequeñas. Estas escalas, al ser mucho más pequeñas que las longitudes características del problema, implican la implementación de un dominio discreto de gran tamaño, lo que se traduce en un costo computacional elevado. Además, el tamaño de las escalas más pequeñas disminuye con el incremento del número de *Reynolds*; es por ello que las simulaciones DNS tienen aplicabilidad en el estudio de flujos turbulentos para números de *Reynolds* moderados, y en geometrías relativamente sencillas.

La contribución práctica de las simulaciones DNS se basa en que éstas permiten obtener conclusiones más confiables del comportamiento de los flujos turbulentos, respecto a otros tipos de modelado con mayor grado de empirismo. Los resultados de cálculos DNS pueden ser considerados luego para el desarrollo de distintos modelos de cierre de la turbulencia, como los que se utilizan en los modelos que buscan resolver las ecuaciones promediadas (RANS). Estos modelos suelen tener un costo computacional menor, ya que resuelven el flujo medio, y en muchos casos resultan suficientes para el estudio de distintas aplicaciones, pero requieren de algún modelo externo de cierre. Esto último se debe a que al realizar el promediado de las ecuaciones de *Navier-Stokes* se introducen nuevas incógnitas, que son los esfuerzos de *Reynolds*, y por lo tanto las cuatro ecuaciones con las que se cuenta no son suficientes para resolver todas las incógnitas del problema, por lo que resulta necesario proponer modelos para algunas de ellas.

3.2. Código de cálculo

3.2.1. Geometría

Se considera un dominio $\tilde{\Omega}$ como el de la figura 2.1 expresado en magnitudes adimensionalizadas. Por lo tanto, el dominio de interés consiste en un ducto curvo de sección transversal cuadrada de lado 2 y amplitud angular $\Delta\theta$. Se considera que la sección transversal del ducto tiene paredes rígidas y que el flujo presenta condiciones periódicas.

cas en la dirección angular, lo que implica que esta última dirección es estadísticamente homogénea.

3.2.2. Método de paso fraccionado

Para resolver las ecuaciones de *Navier-Stokes* se utiliza el *Método de Paso Fraccionado* [22], el cual consiste en introducir un campo de velocidades auxiliar, con el fin de obtener una aproximación temporal a la solución resolviendo dos ecuaciones. Si se realiza una aproximación de la derivada parcial temporal de la velocidad, la ecuación que se busca resolver es la siguiente

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{A} = -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re_\tau} \mathbf{D} - 2\delta_{i\theta}, \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_z)$ y $\mathbf{D} = (D_r, D_\theta, D_z)$ son los términos advectivos y difusivos respectivamente, escritos de forma compacta. Se introduce ahora un campo de velocidades intermedio \mathbf{u}^* y se busca resolver las siguientes ecuaciones alternativas

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{A} = \frac{1}{Re_\tau} \mathbf{D} - 2\delta_{i\theta}, \quad (3.2a)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}. \quad (3.2b)$$

Puede verse que si se suman las dos ecuaciones (3.2) se obtiene nuevamente la ecuación (3.1). Realizando las aproximaciones que se detallan en la sección 3.2.3, puede resolverse la ecuación (3.2a) para obtener \mathbf{u}^* .

Debido a que la velocidad intermedia \mathbf{u}^* es el resultado de una ecuación que no incluye el gradiente de presión, entonces no tiene por qué verificar la ecuación de continuidad. Esto implica que se puede calcular la divergencia de la ecuación (3.2b) e imponer que $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$, obteniendo la siguiente relación

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (3.3)$$

Esta ecuación puede resolverse para p^{n+1} , y luego introducir este valor en la ecuación (3.2b) para obtener, por sustitución directa, el campo de velocidades \mathbf{u}^{n+1} .

3.2.3. Discretización temporal

Antes de realizar una aproximación temporal de los términos advectivos y difusivos, resulta necesario observar los términos que aparecen en cada una de las ecuaciones, para

identificar la mejor forma de aproximarlos. Los términos advectivos son los siguientes

$$A_r = (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r},$$

$$A_\theta = (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r},$$

$$A_z = (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_z.$$

Los términos difusivos son

$$D_r = \frac{1}{Re_\tau} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right),$$

$$D_\theta = \frac{1}{Re_\tau} \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right),$$

$$D_z = \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 u_z.$$

Por motivos que resultan claros más adelante, es útil trasladar los sumandos de los términos difusivos que no se encuentran incluidos en el operador Laplaciano, para ser tratados junto con los términos advectivos correspondientes. Estos términos son justamente los que surgen de la utilización de las ecuaciones de *Navier-Stokes* en coordenadas cilíndricas, pero no están estrictamente asociadas a un proceso de difusión microscópica de momento. De esta forma, se reordenan las ecuaciones para obtener un término pseudo-difusivo, D'_i compuesto únicamente de un operador diferencial, y un término pseudo-advectivo A'_i . Los términos pseudo-advectivos resultantes son

$$A'_r = (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{1}{Re_\tau} \left(\frac{u_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right),$$

$$A'_\theta = (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{1}{Re_\tau} \left(-\frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r^2} \right),$$

$$A'_z = (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_z.$$

De esta forma, toda la asimetría existente en las ecuaciones queda condensada en los

términos pseudo-advectivos, mientras que los términos pseudo-difusivos resultan ser iguales para cada una de las ecuaciones, $D_i = \nabla^2 u_i$ con $i \in \{r, \theta, z\}$.

A continuación se busca resolver la ecuación (3.2a) de forma aproximada utilizando el reordenamiento de términos explicado. Para ello se emplea un esquema explícito de *Adams-Bashforth* de tercer orden para aproximar los términos pseudo-advectivos [23]. Escrito en forma compacta utilizando la misma notación de la ecuación (3.1), la expresión para esta aproximación es

$$\mathbf{A}' = \frac{23}{12}(\mathbf{A}')^n - \frac{16}{12}(\mathbf{A}')^{n-1} + \frac{5}{12}(\mathbf{A}')^{n-2}. \quad (3.4)$$

Además, el término pseudo-difusivo se discretiza utilizando un esquema implícito de *Crank-Nicholson* [23],

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla^2 \mathbf{u}^* + \nabla^2 \mathbf{u}^n}{2}. \quad (3.5)$$

Introduciendo las aproximaciones (3.4) y (3.5) en la ecuación (3.2a), y ordenando los términos se obtiene

$$\left(\nabla^2 - \frac{2Re_\tau}{\Delta t} \right) \mathbf{u}^* = 2Re_\tau \left(-\frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{23}{12}(\mathbf{A}')^n - \frac{16}{12}(\mathbf{A}')^{n-1} + \frac{5}{12}(\mathbf{A}')^{n-2} \right) - \nabla^2 \mathbf{u}^n + 2\delta_{i\theta}. \quad (3.6)$$

Podemos ver entonces que tanto la ecuación para la presión (3.3) como la ecuación para el campo de velocidades intermedio, luego de haber realizado la discretización temporal (3.6) resultan ser casos particulares de una misma ecuación diferencial y pueden escribirse de la siguiente forma

$$(\nabla^2 - \alpha)g(\mathbf{r}) = rhs(\mathbf{r}). \quad (3.7)$$

Para el caso de la ecuación (3.6) vale que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= \mathbf{u}^*(\mathbf{r}), \\ \alpha &= -\frac{2Re_\tau}{\Delta t}, \\ rhs(\mathbf{r}) &= 2Re_\tau \left(-\frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{23}{12}(\mathbf{A}')^n - \frac{16}{12}(\mathbf{A}')^{n-1} + \frac{5}{12}(\mathbf{A}')^{n-2} \right) - \nabla^2 \mathbf{u}^n + 2\delta_{i\theta}. \end{aligned}$$

A su vez, para la ecuación (3.3) se tiene

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= p^{n+1}(\mathbf{r}), \\ \alpha &= 0, \\ rhs(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \end{aligned}$$

En este punto puede verse la utilidad de haber ordenado los términos advectivos y difusivos de la ecuación para el campo de velocidades \mathbf{u}^* ; al considerar los términos llamados pseudo-advectivo y pseudo-difusivo se logra que los operadores diferenciales resultantes en la ecuación para la velocidad y para la presión sean análogos, por lo que es posible resolver ambas ecuaciones utilizando el mismo algoritmo.

3.2.4. Discretización espacial

De la discretización temporal surgen tres ecuaciones diferenciales parciales para el campo de velocidades auxiliar y una para la presión. Para poder resolver numéricamente estas ecuaciones resulta necesario realizar una discretización del dominio espacial.

Se utiliza una grilla equiespaciada en la dirección del flujo, mientras que en las direcciones radial y vertical se utilizan puntos de cuadratura de *Gauss-Lobatto* [23], que permiten una mayor resolución cerca de las paredes. Si la grilla utilizada tiene $N_r \times N_z \times N_\theta$ puntos, entonces los mismos están dados por las siguientes relaciones

$$r_i = r_1 + \left[-\cos \left(\frac{(i-1)\pi}{N_r-1} \right) + 1 \right], \quad i \in [0, N_r], \quad (3.8)$$

$$z_j = \left[-\cos \left(\frac{(j-1)\pi}{N_z-1} \right) + 1 \right], \quad j \in [0, N_z], \quad (3.9)$$

$$\theta_l = \frac{l\Delta\theta}{N_\theta}, \quad l \in [0, N_\theta - 1]. \quad (3.10)$$

Debido a la condición de borde periódica en la dirección del flujo (θ), resulta de utilidad expresar a la función $g(\mathbf{r})$ de la ecuación (3.7) en términos de su transformada de *Fourier* en esta dirección. Esta es la principal razón por la que se discretiza la coordenada θ utilizando una grilla equiespaciada. Entonces tanto el campo de velocidades auxiliar como la presión pueden escribirse como [23]

$$g(r, \theta_l, z) = \sum_{k=-\frac{N_\theta}{2}}^{\frac{N_\theta}{2}-1} \hat{f}_k(r, z) e^{i \frac{2\pi k}{N_\theta} \theta_l}, \quad l \in [0, N_\theta - 1], \quad (3.11)$$

donde k es el número de onda, $\theta_l = l\Delta\theta$ y $\hat{f}_k(r, z)$ son los coeficientes de *Fourier*. Si se aplica la transformada de *Fourier* a la ecuación (3.7) y se utilizan sus propiedades, se obtiene un conjunto de $N_\theta - 1$ ecuaciones diferenciales parciales desacopladas, expresadas en el espacio de *Fourier*, que pueden escribirse de la siguiente forma

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\alpha + \frac{1}{r^2} \left(\frac{2\pi k}{\Delta\theta} \right)^2 \right) \right] \hat{f}_k(r, z) = r \hat{h}s_k(r, z), \quad k \in \left[\frac{-N_\theta}{2}, \frac{N_\theta}{2} - 1 \right], \quad (3.12)$$

donde \hat{f} y $r\hat{h}s$ representan las transformadas de *Fourier* de la función incógnita y del lado derecho, respectivamente. Se obtiene entonces, para cada valor de k , una ecuación diferencial de *Helmholtz* bidimensional, en la cual se utiliza una expansión espectral de *Chebyshev* para expresar los operadores de derivada primera en las direcciones no homogéneas, es decir r y z , como operadores matriciales [23]. La ecuación resultante es

$$\left[\underline{\underline{DR}}^2 - \underline{\underline{R}}_{-1}^2 \left(\frac{2\pi k}{\Delta\theta} \right)^2 \right] \hat{f}_k + \hat{f}_k \underline{\underline{DZ}}^2 - \alpha \hat{f}_k = r \hat{h}s_k, \quad (3.13)$$

donde los operadores de derivadas primeras son $\underline{\underline{DR}} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r}$ y $\underline{\underline{DZ}} \in \mathbb{R}^{N_z \times N_z}$. El operador de derivada segunda en la dirección vertical se calcula como $\underline{\underline{DZ}}^2 = \underline{\underline{DZ}} \underline{\underline{DZ}}$, mientras que el correspondiente a la dirección radial es $\underline{\underline{DR}}^2 = \underline{\underline{R}}_{-1} \underline{\underline{DR}} \underline{\underline{R}} \underline{\underline{DR}}$. En las expresiones anteriores se han utilizado las siguientes definiciones

$$\underline{\underline{R}}_{-1} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r} \setminus (r_{-1})_{ij} = \begin{cases} 1/r_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

$$\underline{\underline{R}} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r} \setminus (r)_{ij} = \begin{cases} r_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Si definimos $\underline{\underline{DR}}_k^2 := \underline{\underline{DR}}^2 - \underline{\underline{R}}_{-1}^2 \left(\frac{2\pi k}{\Delta\theta} \right)^2$ entonces la ecuación (3.13) puede escribirse como

$$\underline{\underline{DR}}_k^2 \hat{f}_k + \hat{f}_k \underline{\underline{DZ}}^2 - \alpha \hat{f}_k = r \hat{h}s_k. \quad (3.14)$$

Para resolver esta ecuación se puede hacer uso de que los operadores $\underline{\underline{DR}}_k^2$ y $\underline{\underline{DZ}}^2$ son diagonalizables, por lo que pueden representarse como $\underline{\underline{DR}}_k^2 = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\Lambda}}_r \underline{\underline{P}}^{-1}$ y $\underline{\underline{DZ}}^2 = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\Lambda}}_z \underline{\underline{Q}}^{-1}$. Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.14) se obtiene

$$\underline{\underline{P}} \underline{\underline{\Lambda}}_r \underline{\underline{P}}^{-1} \hat{f}_k + \hat{f}_k \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\Lambda}}_z \underline{\underline{Q}}^{-1} - \alpha \hat{f}_k = r \hat{h}s_k. \quad (3.15)$$

Premultiplicando esta expresión por $\underline{\underline{P}}^{-1}$ y postmultiplicando por $\underline{\underline{Q}}$

$$\underline{\underline{\Lambda}}_r \underline{\underline{P}}^{-1} \hat{f}_k \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{P}}^{-1} \hat{f}_k \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\Lambda}}_z - \tilde{\alpha} \underline{\underline{P}}^{-1} \hat{f}_k \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{P}}^{-1} r h s_k \underline{\underline{Q}}. \quad (3.16)$$

Si ahora se define

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \hat{f}_k \underline{\underline{Q}}, \quad (3.17)$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P}}^{-1} r h s_k \underline{\underline{Q}}, \quad (3.18)$$

la ecuación resultante es

$$\underline{\underline{\Lambda}}_r \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Lambda}}_z - \tilde{\alpha} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}. \quad (3.19)$$

De esta forma, y teniendo en cuenta que $(\Lambda_r a)_{ij} = (\Lambda_r)_{ii}(a)_{ij}$ y $(a \Lambda_z)_{ij} = (\Lambda_z)_{ii}(a)_{ij}$, la ecuación (3.19) puede expresarse indicialmente como

$$(a)_{ij} = \frac{(b)_{ij}}{(\Lambda_r)_{ii} + (\Lambda_z)_{ii} - \tilde{\alpha}}. \quad (3.20)$$

En conclusión, el procedimiento de cálculo consiste en diagonalizar los operadores $\underline{\underline{D}}R_k^2$ y $\underline{\underline{D}}Z^2$, calcular la matriz $\underline{\underline{B}}$, obtener los valores de $\underline{\underline{A}}$ por medio de la ecuación (3.20), y luego obtener los valores de la transformada de *Fourier* (\hat{f}_k), por medio de la definición de $\underline{\underline{A}}$. Finalmente se calcula la antitransformada de *Fourier* y se obtiene la solución de la ecuación (3.7), correspondiente al paso de tiempo $(n + 1)$.

3.2.5. Condiciones de contorno de la ecuación de Helmholtz

Para resolver la ecuación diferencial (3.12) es necesario aplicar condiciones de borde adecuadas. Sea $R := \{(r, z) \in [r_1, r_1 + 2] \times [0, 2]\}$ el dominio en donde se busca resolver dicha ecuación y ∂R la frontera del mismo. Entonces las condiciones adecuadas son condiciones de *Dirichlet* para las componentes de la velocidad, y de derivada normal nula (*Neumann*) para la presión

$$\begin{aligned} \hat{u}_{rk}^*(\partial R) &= 0, \\ \hat{u}_{zk}^*(\partial R) &= 0, \\ \hat{u}_{\theta k}^*(\partial R) &= 0, \\ \left. \frac{\partial \hat{p}_k^{n+1}}{\partial n} \right|_{\partial R} &= 0. \end{aligned}$$

Debido a que el valor de las incógnitas en la frontera está dado por las condiciones de borde, el método de resolución explicado anteriormente en la sección 3.2.4 es únicamente válido para los $(N_r - 2) \times (N_z - 2)$ puntos interiores del dominio R . No obstante,

los operadores matriciales $\underline{\underline{DR}}_k^2$ y $\underline{\underline{DZ}}_k^2$ se ven modificados debido a la introducción de las condiciones de borde. Se recomienda observar el desarrollo de *Martorana* [19], en donde se detalla la forma final de los operadores para el caso de un ducto recto de sección transversal cuadrada; debido a que se está resolviendo la ecuación de *Helmholtz* para cada uno de los números de onda, el procedimiento allí indicado resulta idéntico al necesario para el caso de estudio de este trabajo.

3.3. Procesamiento de los datos

El resultado de la aplicación del código de cálculo pseudo-espectral descrito es la obtención del campo de velocidades instantáneo y tridimensional, de forma discreta, en todos los puntos del dominio, es decir $\mathbf{u} = (u_r(r_i, z_j, \theta_l, t_n), u_z(r_i, z_j, \theta_l, t_n), u_\theta(r_i, z_j, \theta_l, t_n))$. Si bien los valores instantáneos resultan necesarios para la implementación del código, al estudiar la turbulencia el interés recae principalmente sobre valores medios del flujo. Es por ello que una vez obtenido el campo de velocidades se procede a realizar el promediado del mismo.

Debido a que la dirección θ resulta estadísticamente homogénea, los valores medios de las magnitudes no resultan dependientes de esta coordenada, y cada una de las secciones transversales del dominio puede considerarse como una realización del mismo experimento. Es posible entonces realizar un promediado espacial sobre esta dirección de forma discreta, obteniendo así

$$\overline{\mathbf{u}}^e(r_i, z_j, t_n) = \frac{1}{\Delta\theta} \sum_{l=0}^{N_\theta-1} \mathbf{u}(r_i, z_j, \theta_l, t_n). \quad (3.21)$$

También es posible llevar a cabo un promediado temporal en cada uno de los puntos del dominio. Si se considera un valor de tiempo adimensional t_n tal que el flujo se encuentra completamente desarrollado, y se define el tiempo de promediado $T_p = N_t \Delta t$, donde N_t es el número de pasos temporales tomados para calcular la estadística, entonces se puede escribir

$$\overline{\mathbf{u}}^t(r_i, \theta_l, z_j) = \frac{1}{N_t \Delta t} \sum_{n=0}^{N_t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n + n \Delta t). \quad (3.22)$$

Entonces el código de cálculo obtiene el campo de velocidades tridimensional en cada paso de tiempo, y luego calcula $\overline{\mathbf{u}}(r_i, z_j)$, el resultado de realizar el promedio espacial y temporal del campo de velocidades del problema analizado. Estos valores son guardados para el posterior posprocesamiento.

Además, resulta importante almacenar otras cantidades medias luego de cada paso de tiempo, las cuales se utilizan para calcular distintas magnitudes asociadas a la

turbulencia. Estas son los valores medios de los cuadrados de las velocidades, y los valores medios de los productos de las componentes de la velocidad, tomadas de a dos, así como también los promedios de las derivadas espaciales de todas estas cantidades. En el apéndice [A.3](#) se muestra el proceso llevado a cabo para obtener distintos valores de interés, tales como los tensores de *Reynolds*, los valores cuadráticos medios de las componentes del campo de velocidades, y la energía cinética turbulenta (junto con los términos de producción y disipación), a partir de los valores obtenidos del procesamiento aquí descrito. En este se indican también distintas cantidades de interés calculadas en los capítulos siguientes.

Capítulo 4

Validación del código de cálculo

En este capítulo se muestran una serie de resultados obtenidos para distintos casos, a partir del código de cálculo implementado. Los mismos se comparan con soluciones analíticas, o bien con resultados experimentales existentes en la bibliografía, con el fin de determinar el correcto funcionamiento del código.

Se recuerda que este trabajo incluye la adaptación de un código escrito en coordenadas cartesianas, el cual se encuentra previamente validado. La implementación en coordenadas cilíndricas incluye, entre otras cosas, la identificación e implementación de los términos incluidos en los lados derechos que aparecen en este sistema de coordenadas, además de la implementación correcta de los términos del Laplaciano. Se busca determinar si la adaptación de este código a coordenadas cilíndricas resulta correcto.

4.1. Flujo Couette laminar

El primer caso presentado corresponde al de un flujo *Couette* laminar entre cilindros concéntricos. Este problema es de interés para la validación, ya que si se consideran cilindros infinitos, el campo de velocidades en régimen laminar resulta no nulo únicamente en la componente u_θ . Debido a que es un problema sencillo, puede obtenerse una solución analítica para la velocidad.

Sean dos cilindros infinitos, el interior de radio r_1 y el exterior de radio r_2 , tales que $r \in [r_1, r_2]$. Se considera que estos giran a velocidades angulares $\Omega_1 = u_\theta(r_1)/r_1$ y $\Omega_2 = u_\theta(r_2)/r_2$ respectivamente, entonces la velocidad en la dirección angular es [\[24\]](#)

$$u_\theta = \frac{\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{\Omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \quad (4.1)$$

Para poder simular este problema utilizando el código desarrollado, se imponen como condiciones de borde las velocidades en los radios interior y exterior. Además, para

modelar el caso de dos cilindros infinitos dentro de un dominio discreto es posible considerar condiciones de borde de *Neumann* en las fronteras superior e inferior, es decir $\partial u / \partial n = 0$ en tales regiones. De esta forma, el problema resultante es análogo a tomar una porción arbitraria de altura dada, de un cilindro infinito, siempre que el régimen sea laminar. Cabe aclarar que la solución resulta independiente del número de *Reynolds* en este caso.

Se presentan a continuación los resultados obtenidos para dos casos simulados, en los que el dominio adimensional es $\{r \in [1, 2]\}$. En ambos casos se fija el cilindro interior al marco de referencia, y al cilindro exterior se le imponen velocidades tangenciales $u_\theta(r = 2) = 5$ y $u_\theta(r = 2) = 10$ en cada caso.

En ambos casos se utiliza un grilla tal que $N_r = N_z = 25$ y $N_\theta = 16$. En la figura 4.1 se muestran las velocidades en la dirección del flujo, en función de la coordenada radial, obtenidas mediante las simulaciones indicadas. Se muestran también las soluciones analíticas correspondientes.

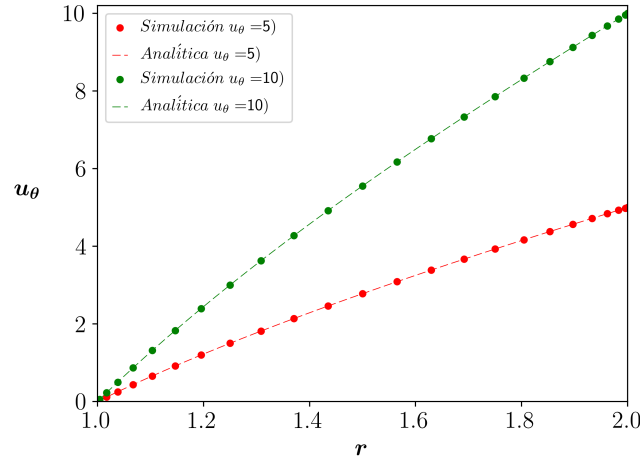


Figura 4.1: Flujo Couette laminar entre cilindros concéntricos infinitos, con $1 < r < 2$. Se presentan los casos $u_\theta(r = 2) = 5$ y $u_\theta(r = 2) = 10$, comparados con las soluciones analíticas correspondientes.

Puede observarse una adecuada correspondencia entre los resultados obtenidos y la solución analítica. Se aclara también que estos resultados resultan independientes de las coordenadas vertical y angular.

4.2. Flujo Dean laminar

Seguidamente se muestran simulaciones en régimen laminar del problema de *Dean* en un ducto de sección transversal cuadrada. Se denomina *Flujo Dean* al flujo que se desarrolla en un ducto curvo sometido a un gradiente de presión uniforme. Debido a

la curvatura del ducto, en régimen laminar se desarrolla un flujo secundario de primer tipo que genera una recirculación en las secciones transversales. Si estas son cuadradas, como las estudiadas en este trabajo, el patrón de flujo secundario resulta dependiente del número de *Dean* [10]

$$De = \frac{Re_b}{\sqrt{\frac{R_m}{L_r}}}, \quad (4.2)$$

donde $Re_b = 2hu_b/\nu$ es el número de *Reynolds* basado en la velocidad media en la dirección del flujo, u_b y en el ancho del canal, $2h$. Se sabe que para un valor $De = 125$ el patrón de flujo secundario corresponde a dos vórtices contrarrotantes, en las mitades superior e inferior de la sección transversal. Por el contrario, para $De = 150$ este comportamiento se ve modificado y aparecen dos vórtices adicionales de menor tamaño sobre el radio exterior del ducto.

Se muestran los resultados obtenidos para simulaciones realizadas con valores $De = 125$ y $De = 150$, y se las compara con resultados experimentales obtenidos por *Bara et al.* [10]. En la tabla 4.1 se muestra la información de tres grillas distintas utilizadas. El objetivo de utilizar grillas con número de puntos creciente es verificar la convergencia de malla.

Malla	$N_r \times N_z \times N_\theta$
1	31x31x52
2	61x61x104
3	93x93x156

Tabla 4.1: Grillas utilizadas para las simulaciones del flujo Dean laminar.

En todos los casos se iniciaron las simulaciones a partir de una condición inicial nula para la velocidad en todo el dominio, y se utilizó un tiempo de simulación suficientemente grande como para que la solución resultara estacionaria. Debido a que el flujo es laminar, no fue necesario realizar un análisis estadístico del campo de velocidades, ya que la solución resulta independiente de la coordenada angular.

En la figura 4.2 se muestra la velocidad en la dirección del flujo adimensionalizada con la velocidad media, en función del radio, medida a la mitad de la sección. En el eje de las abscisas se muestra la coordenada radial $\tilde{r} = r'/2h$, donde r' se mide desde el centro de la sección.

Puede observarse que para $De = 125$, tanto la malla más fina como la más gruesa reproducen los resultados experimentales razonablemente bien. En el caso de $De = 150$, salvo para la malla 1 (para la cual existen diferencias entre la simulación y los datos experimentales en la región cercana al radio exterior), los resultados se ajustan

correctamente a los valores experimentales.

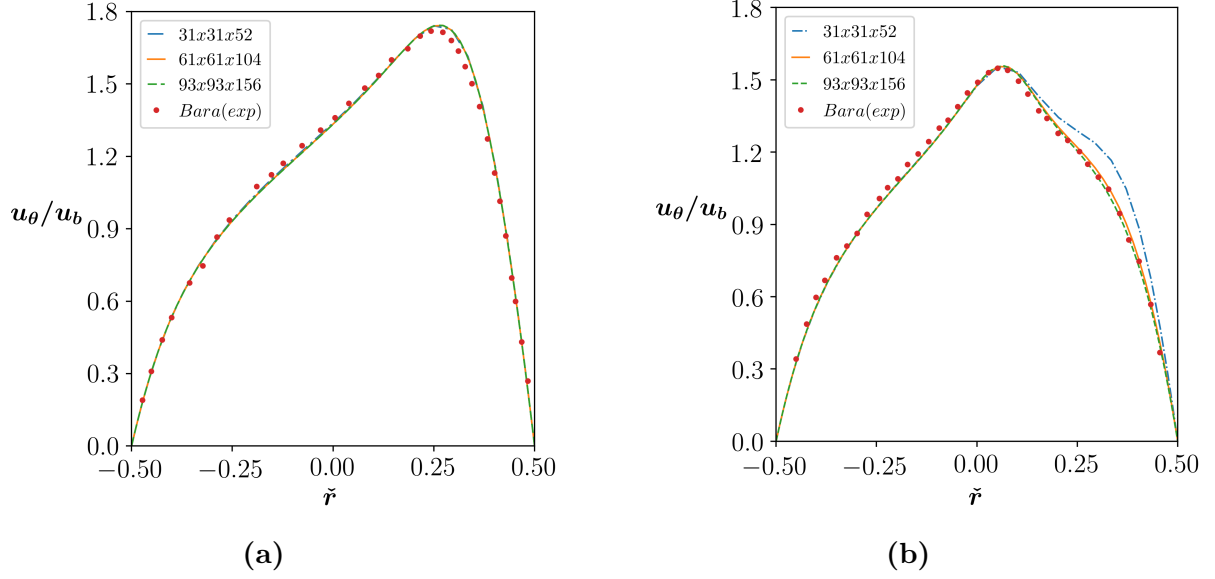


Figura 4.2: Velocidad en la dirección del flujo adimensionalizada con la velocidad media, en función del radio, medida a la mitad de la altura de la sección. (a) $De = 125$ y (b) $De = 150$.

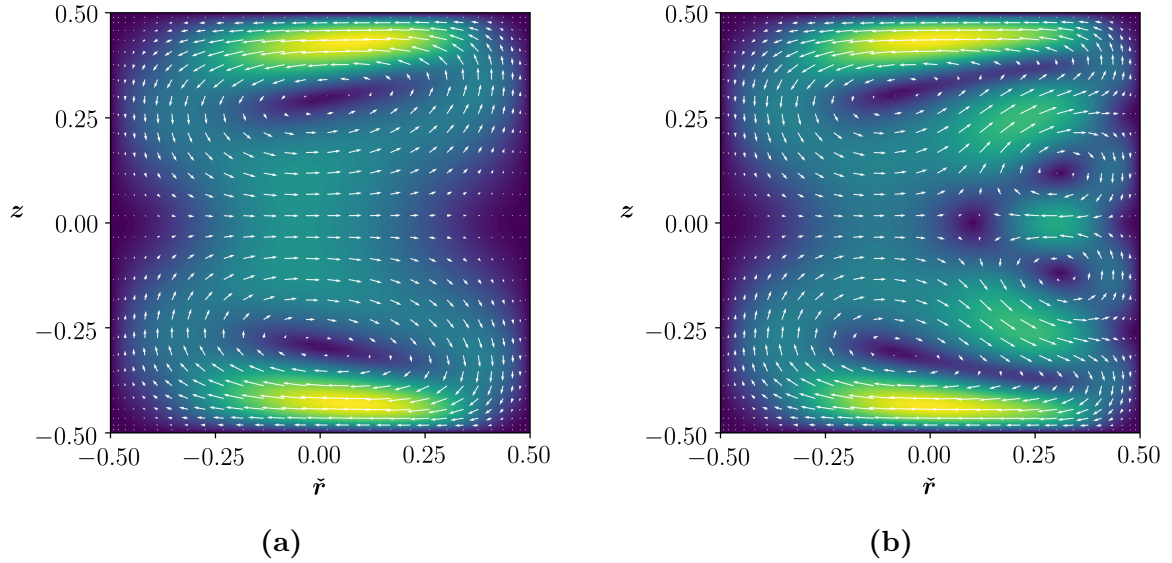


Figura 4.3: Vectores de flujo secundario correspondientes a los casos (a) $De = 125$ y (b) $De = 150$. Los colores más claros están asociados con mayores valores del flujo secundario.

En la figura 4.3 se muestran secciones transversales del ducto y se grafica el campo de velocidades secundario para los dos valores de número de $Dean$. De acuerdo a lo descrito en la bibliografía, se ve que el patrón de flujo secundario evoluciona de uno compuesto por dos vórtices para $De = 125$, a uno compuesto de cuatro vórtices para $De = 150$.

4.3. Flujo Dean perturbado

Habiendo verificado que la implementación del modelo en coordenadas cilíndricas funciona correctamente para casos laminares, se buscó validar un caso turbulento simulable con la herramienta desarrollada. Existen numerosos estudios de flujos turbulentos en ductos curvos, pero debido a que gran parte de ellos se dan en ductos de sección transversal circular, o bien en geometrías que no permiten el completo desarrollo del flujo (tales como codos o curvas con una amplitud angular insuficiente), no fue posible encontrar una situación fácilmente representable con el código utilizado. Esto se debe principalmente a que al imponer una condición de borde periódica sobre la dirección angular, se espera que los flujos que se puedan modelar estén completamente desarrollados.

Las validaciones laminares realizadas no resultan suficientes para garantizar que la implementación de todos los términos de las ecuaciones de *Navier Stokes* funcionen correctamente, ya que pueden existir términos que naturalmente se anulen en los casos estudiados. La implementación de condiciones iniciales nulas para los casos estudiados no permite analizar lo que ocurre con los términos que se anulan en la solución estacionaria.

Para completar la validación se optó por simular un flujo *Dean* con $De = 125$ nuevamente, pero esta vez utilizando una condición inicial obtenida de un cálculo turbulento DNS en un ducto recto. De esta forma, puede pensarse a la condición inicial como una perturbación tridimensional del campo de velocidades; si el código funciona correctamente, todos los términos que no correspondan a la solución física deberían atenuarse en el tiempo, y el resultado final debería ser análogo al obtenido para condiciones iniciales nulas.

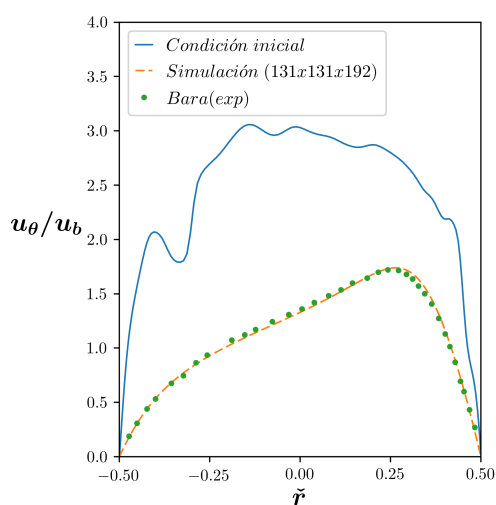


Figura 4.4: Flujo Dean para $De = 125$ a partir de una condición inicial perturbada, obtenida de un cálculo DNS turbulento.

En la figura 4.4 se muestra una figura análoga a la 4.2, en la que se compara la solución estacionaria con la condición inicial impuesta. Puede verificarse que el resultado final es igual al obtenido desde una condición inicial nula. Este resultado verifica que la implementación del código de cálculo en coordenadas cilíndricas resulta correcto, y que entonces es válido realizar simulaciones en régimen turbulento utilizando esta herramienta.

Cabe aclarar que no se realizó la misma verificación para el caso $De = 125$, ya que según [10], la misma resulta inestable ante perturbaciones asimétricas, y por lo tanto al imponer una condición inicial arbitrariamente perturbada no se recuperaría la solución obtenida a partir de condiciones iniciales nulas, sino una solución dependiente del tiempo.

Capítulo 5

Resultados

Este capítulo contiene los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas, así como el análisis de los mismos a medida que se van mostrando. Se comienza con una descripción de los parámetros que resultan de interés para la realización de cálculos DNS, y para este caso de estudio en particular; se indica también la selección de dichos parámetros. Luego se muestran los resultados de las simulaciones. Se presentan valores indicativos del flujo medio, el flujo secundario sobre una sección transversal del ducto, la distribución de esfuerzos de corte en las paredes y la turbulencia. Finalmente se muestran una serie de resultados asociados a propiedades globales del flujo, tales como el factor de fricción de *Darcy*.

5.1. Parámetros de las simulaciones

Habiendo validado la implementación de una herramienta para realizar cálculos DNS en un ducto curvo de sección cuadrada, resulta importante definir una serie de parámetros necesarios para que las simulaciones representen situaciones físicas.

En primera instancia es necesario definir la discretización espacial y temporal, para ello se considera un dominio espacial como el de la figura 2.1. Debido a la imposición de la condición de borde periódica en la dirección angular, la magnitud de $\Delta\theta$ debe seleccionarse de tal forma que sea suficiente como para que los valores del campo de velocidad a la entrada y a la salida del ducto se encuentren descorrelacionados; de esta forma la suposición de un flujo periódico en esta dirección resulta razonable. Para realizar el dimensionamiento de $\Delta\theta$ se utiliza la referencia de un estudio previo de cálculos DNS en un ducto recto de sección cuadrada de lado $2h$ [19], en donde la longitud en la dirección del flujo considerada es $4\pi h$. Esta longitud resulta razonable debido a que se espera que el flujo desarrollado presente vórtices cuyo tamaño máximo sea del orden de $2h$, y por lo tanto no se espera encontrar estructuras turbulentas que

alcancen a la entrada y a la salida del ducto simultáneamente.

De forma análoga, para el caso de estudio actual, se busca que la longitud de arco sobre el radio medio, S_m , sea tal que

$$S_m = R_m \Delta\theta = 4\pi h. \quad (5.1)$$

Si se considera el radio medio adimensional $\widetilde{R}_m = R_m/h$, se tiene que

$$\Delta\theta = \frac{4}{\widetilde{R}_m} \pi. \quad (5.2)$$

De esta forma, la amplitud angular del ducto depende del radio medio de curvatura adimensional.

El dominio espacial se discretiza considerando una grilla de $N_r \times N_z \times N_\theta$ puntos, con $N_r = N_z = 131$ y $N_\theta = 192$, utilizando la discretización definida en las ecuaciones (3.8) a (3.10). La cantidad de puntos seleccionada se basa en experiencias anteriores de cálculos DNS para ductos rectos, en los que tal resolución es suficiente resolver todas las escalas turbulentas de importancia.

La discretización temporal se dimensiona siguiendo el criterio de la condición de *Courant-Friedrichs-Lewy*. Esta es una medida de la propagación de la información resultante de la solución del método numérico a través de una celda computacional. Si $\tilde{\Omega}$ es el dominio computacional discreto, se busca que

$$CFL = \max_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{|u_{r_i}|}{\Delta r} + \frac{|u_{\theta_l}|}{r \Delta\theta} + \frac{|u_{z_j}|}{\Delta z} \right) \Delta t < 1, \quad (5.3)$$

con $i \in [1, N_r]$, $l \in [0, N_\theta - 1]$ y $j \in [0, N_z]$. Si se cumpliera que $CFL > 1$, implicaría que la información se estaría trasladando a través de más de una celda en un paso temporal, por lo que debería disminuirse el valor de Δt para verificar la estabilidad del método.

Una vez definidos los parámetros numéricos de las simulaciones, resta definir los parámetros físicos del caso de estudio que se está analizando. En principio, el código de cálculo permite la variación de cuatro distintos parámetros físicos, a saber:

- El número de *Reynolds*, $Re_\tau = u_{\tau,avg} h / \nu$,
- La relación de aspecto de la sección, $\frac{L_r}{L_z}$,
- El radio medio de curvatura, R_m ,
- El forzado en la dirección del flujo sobre la sección transversal.

Debido a que un estudio paramétrico de todos estos valores no resulta práctico debido al costo computacional de las simulaciones DNS y al tiempo disponible para la realización de este proyecto, se optó por mantener una relación de aspecto a la sección igual a 1 (sección cuadrada), un forzado uniformemente distribuido sobre la sección, y un valor de Re_τ de 180. Este número de *Reynolds* implica el desarrollo de flujos turbulentos en ductos rectos, por lo que resta verificar que se desarrolle turbulencia en la geometría analizada. Se decidió también realizar simulaciones para distintos valores del radio de curvatura R_m , ya que es esperable que distintas configuraciones de flujo secundario aparezcan para distintos valores de este parámetro. Además como se comentó en la sección 4.2, el parámetro adimensional que gobierna el comportamiento del flujo sobre esta geometría es el número de *Dean*, que resulta dependiente del radio de curvatura.

Al no contar con una condición inicial representativa para cada una de las simulaciones, se utilizó como condición inicial un campo de velocidades turbulento obtenido del cálculo DNS en un ducto recto utilizado como referencia. Debido a que esta condición inicial es una solución de un problema físico distinto al que se busca simular, fue necesario realizar suficientes pasos temporales de cálculo para alcanzar una condición inicial representativa antes de iniciar el promediado. Se utilizó un intervalo de 125 unidades de tiempo para alcanzar el estado estadísticamente estacionario, luego se utilizó un intervalo de promediado de 300 unidades de tiempo (este tiempo de cálculo equivale aproximadamente a 2000000 pasos temporales, lo que equivalió a 25 días de cálculo por caso). Además, debido a la simetría del flujo respecto de la horizontal por el centro de la sección, se realizó un promediado entre la mitad superior e inferior del ducto, lo que corresponde a considerar que ambas mitades son dos realizaciones diferentes el mismo experimento.

5.2. Casos de estudio

Los casos estudiados corresponden a seis simulaciones realizadas para valores crecientes de R_m , en un rango de valores entre 10 y 250. En la tabla 5.1 se muestran los casos estudiados, junto con las principales propiedades del flujo. En adelante, cada uno de los casos se referencia con el valor del radio medio de curvatura adimensional. Se indican los valores del número de *Reynolds* basado en la velocidad principal media sobre la sección, u_b . Se indica también el número de *Dean*, definido para este caso como $De = Re_b / \sqrt{R_m}$. Por último se indica la velocidad máxima en la dirección del flujo y la coordenada radial en donde ocurre este máximo.

Debido a que al radio medio es distinto en cada simulación, entonces el dominio radial no es el mismo para los casos estudiados, por este motivo es que se utiliza en todos los resultados la variable independiente $\hat{r} = r - r_1$, que toma valores de 0 a 2 para todos

los casos.

Se observa que al incrementar el radio medio, el número de *Reynolds*, Re_b , aumenta, esto implica que la imposición de una fuerza externa igual en todos los casos deriva en una velocidad media en la dirección del flujo mayor a medida que el radio medio aumenta, y por lo tanto el caudal no es un parámetro fijo del problema estudiado. Cabe aclarar que debido a la implementación utilizada, ajustar el forzado para obtener iguales valores de Re_b no resultó práctico, debido a la necesidad de hacer un ajuste iterativo, y al costo computacional del código de cálculo.

Existe un incremento de la velocidad media de aproximadamente 30 % entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 50$, mientras que el incremento entre los casos $R_m = 100$ y $R_m = 250$ solo es del 2.8 %. Respecto al número de *Dean*, debido a que el radio medio aumenta en un orden de magnitud, mientras que el número de *Reynolds* solo lo hace en un 32.5 % entre los casos extremos, el resultado neto es una disminución de De en un 73 % en el caso $R_m = 250$ respecto al caso $R_m = 10$.

R_m	u_b	Re_b	De	$\overline{u_{\theta máx}}$	$\hat{r}_{u_{máx}}$	$u_{\tau,l}$	$u_{\tau,r}$
10	11.40	2052	649	15.74	1.59	0.596	1.087
30	13.56	2441	446	18.89	1.51	0.621	1.193
50	14.71	2648	375	19.45	1.44	0.686	1.189
100	15.07	2713	271	19.66	1.40	0.780	1.177
150	15.10	2718	222	19.89	1.40	0.822	1.168
250	15.12	2722	172	19.97	1.29	0.896	1.158

Tabla 5.1: Casos analizados en el presente trabajo. R_m es el radio medio de curvatura adimensionalizado con el semiancho del ducto h , u_b es la velocidad media en la dirección del flujo, $Re_b = u_b h / \nu$ es el número de *Reynolds* basado en la velocidad media, De es el número de *Dean*, $\overline{u_{\theta máx}}$ es el valor máximo que alcanza la velocidad principal, el cual ocurre para un radio $\hat{r}_{u_{máx}}$.

Puede verse en la tabla 5.1 que la velocidad máxima en la dirección del flujo aumenta monótonamente a medida que se incrementa el radio, y que a su vez la ubicación de dicho máximo sobre la coordenada radial \hat{r} se desplaza, acercándose progresivamente hacia el centro de la sección. Este comportamiento se encuentra en concordancia con la existencia de un máximo en el centro de la sección para el caso de un ducto recto.

Se muestran también las velocidades de corte locales en la pared derecha ($u_{\tau,l}$) e izquierda ($u_{\tau,r}$), calculadas sobre $z = 1$.

El hecho de que los valores de Re_b para los casos $R_m = 10$ a $R_m = 50$ sean considerablemente menores a los valores para los casos $R_m = 100$ en adelante, y teniendo en cuenta que el flujo secundario tiende a estabilizar el flujo y retrasar la transición

laminar-turbulenta, permite pensar que para estos casos no se espera observar fenómenos propios de una turbulencia completa, sino fenómenos asociados a un régimen de transición. Cabe aclarar que los casos $R_m = 100$ en adelante tienen valores de Re_b que no distan significativamente del valor correspondiente a un ducto recto (aproximadamente 2700 [19]), y por lo tanto podría considerarse que estos casos se encuentran en régimen completamente turbulento.

Si se utiliza la correlación de Ito [25] para tubos helicoidales de sección transversal para obtener los valores críticos de Re_b (a partir de los cuales puede considerarse régimen completamente turbulento), los casos $R_m = 100$ a $R_m = 250$ presentan valores mayores al crítico, mientras que los casos restantes se encuentran por debajo; estos valores se muestran en la tabla 5.2. No obstante, esta referencia no es completamente representativa, debido a que al considerar secciones cuadradas existen otros mecanismos, como los que generan el flujo secundario de segundo tipo, que afectan al desarrollo de la turbulencia. En cualquier caso, el lector debería estar al tanto de que las conclusiones obtenidas en este trabajo aplican a fenómenos de turbulencia de bajo número de *Reynolds*, o bien a regímenes de transición.

R_m	Re_b	$Re_{crít}$
10	2052	4786
30	2441	3368
50	2648	2860
100	2713	2290
150	2718	2012
250	2722	1708

Tabla 5.2: Comparación entre los valores de Re_b de los casos de estudio y los valores críticos para ductos curvos circulares de diámetro $2h$, según los estudios de Ito [25]; cabe aclarar que los valores de Re_b se encuentran calculados considerando el semiancho h .

5.3. Flujo principal

La figura 5.1 muestra la velocidad media en la dirección del flujo, en función del radio, para una altura de $z = 1$. En un ducto recto, el perfil de velocidad principal media presenta un máximo en el centro de la sección transversal, y una distribución simétrica respecto a la vertical central; además por la simetría del mismo, los perfiles obtenidos sobre las dos mediatrices de las paredes horizontales y verticales resultan idénticos [12]. En los casos en los que el ducto presenta una curvatura, puede verse que la ubicación

del valor máximo se desplaza hacia el radio exterior y el perfil se vuelve asimétrico. Este fenómeno ocurre debido al efecto de aceleración centrífuga experimentada por una parcela de fluido que se desplaza en la dirección angular. Vista desde la parcela de fluido, la fuerza de inercia que actúa sobre esta tiende a desplazarla hacia radios mayores, generando una redistribución del flujo que origina un gradiente de presión opuesto en la dirección radial. La distribución asimétrica de velocidad resultante es tal que el gradiente de presión equilibra a la fuerza inercial. A medida que se incrementa el radio medio, este fenómeno se vuelve menos importante y entonces el máximo de los perfiles de velocidad se traslada hacia el centro de la sección. No obstante, incluso en el caso $R_m = 250$ se observa una asimetría del perfil, indicando que el efecto de este fenómeno no resulta despreciable.

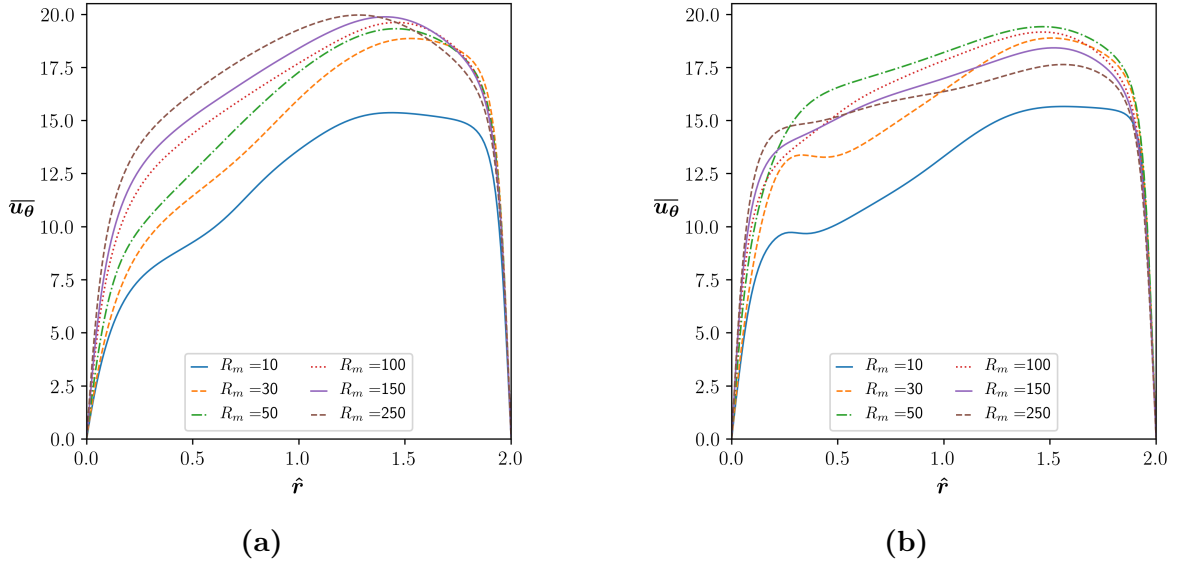


Figura 5.1: Velocidad media $\overline{u_\theta}$ en función del radio, calculada en $z = 1$ (a) y en $z = 0.25$ (b).

En la región central de la sección, lejos de las paredes, es esperable que el balance entre gradiente de presión y fuerza centrífuga no se encuentre afectado por otros términos de la ecuación de momento, es decir que podemos suponer,

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial r} \approx \frac{\overline{u_\theta^2}}{r}; \quad \hat{r} \approx 1. \quad (5.4)$$

En la figura 5.2 se puede ver el cociente entre estas dos cantidades en función del radio, sobre la horizontal central. Como es de esperar, para los radios medios menores, el mismo es cercano a 1 en la porción central del ducto. A medida que se incrementa el radio medio, comienzan a tomar importancia otros efectos sobre la configuración del flujo medio, y este cociente se aleja de la unidad, como puede verse, por ejemplo, en el caso $R_m = 250$.

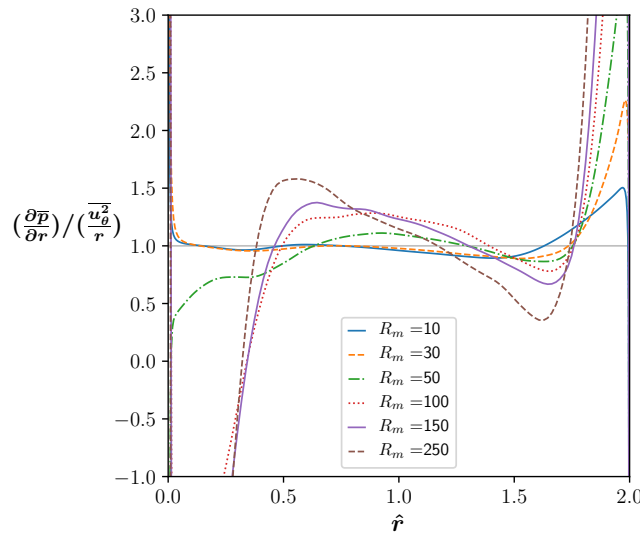


Figura 5.2: *Cociente entre el gradiente de presión y la aceleración centrífuga en función del radio en $z = 1$.*

En la figura 5.1 se observa también que para los casos $R_m = 10$ a $R_m = 100$ los valores de velocidad máxima en $z = 1$ y en $z = 0.25$ no difieren significativamente, mientras que para los casos $R_m = 150$ y $R_m = 200$, la velocidad máxima resulta mayor para $z = 1$ que para $z = 0.25$. Esto implica que la distribución resulta más uniforme en la dirección vertical para los casos de radios medios menores; lo cual puede verificarse en la figura 5.3, en la que se muestra la velocidad media $\overline{u_\theta}$ en función de la coordenada z , para valores de $\hat{r} = 0.5$ y $\hat{r} = 1.5$. En la figura 5.3b se ve que para los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$, el perfil alcanza el valor máximo a la mitad de la altura sobre la sección, y la velocidad disminuye monótonamente para puntos alejados de la línea central, mientras que para los casos restantes se ve que los perfiles son aproximadamente uniformes sobre una región considerable alrededor de $z = 1$. La disminución de los valores de velocidad para los mayores radios, en $z = 0.25$ respecto a los que se observan en $z = 1$ en la figura 5.1 indican que a medida que se aumenta el radio medio, la región de máxima velocidad se localiza más en el centro de la sección.

Puede verse también en la figura 5.1 que para los casos $R_m = 10$, $R_m = 30$ y $R_m = 50$, la velocidad resulta mayor cerca de la pared inferior ($z = 0.25$) que en el centro de la sección ($z = 1$). Este comportamiento puede verificarse en la figura 5.3a, en donde los perfiles verticales muestran dos máximos locales cerca de las paredes superior e inferior, que se desplazan hacia el centro a medida que el radio medio aumenta. Esta modificación del flujo medio es debida a la acción del flujo secundario.

En ausencia de flujos secundarios de primer tipo, se esperaría observar una distribución de velocidad simétrica respecto a las dos líneas medias de la sección transversal, con el máximo en el centro de la misma. El flujo secundario genera una transferencia de fluido, desde regiones de elevado momento lineal a la derecha, hacia regiones de bajo

momento lineal a la izquierda, mediante una recirculación desde el radio exterior hacia el radio interior por las paredes superior e inferior del ducto. De esta forma, las regiones cercanas a estas paredes alcanzan valores de velocidad mayores que las correspondientes al centro de la sección, cuando el efecto del flujo secundario es significativo.

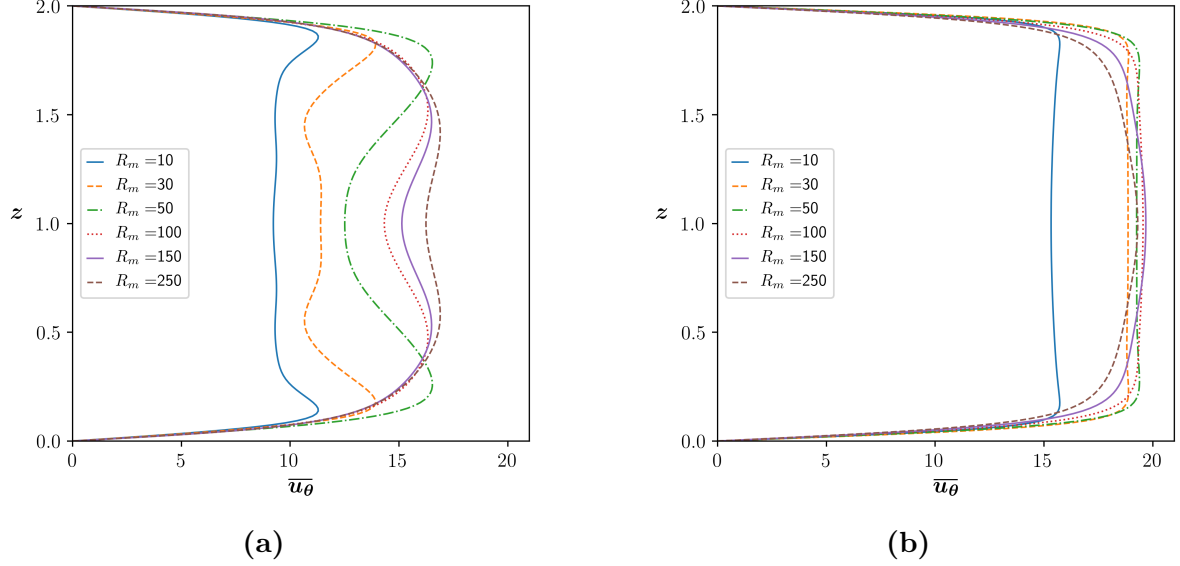


Figura 5.3: Velocidad media $\overline{u_\theta}$ en función de la coordenada vertical, calculada en $\hat{r} = 0.5$ (a) y en $\hat{r} = 1.5$ (b).

Para comparar de forma global el comportamiento del flujo medio sobre toda la sección, en la figura 5.4 se muestra la distribución de la velocidad $\overline{u_\theta}$, adimensionalizada con la velocidad media, u_b , para cada caso estudiado. Puede observarse de forma conjunta el efecto de la fuerza centrífuga y del flujo secundario sobre el flujo medio; mientras que el primero genera una asimetría de la distribución de velocidad desplazando las regiones de valor máximo hacia el radio exterior, el segundo genera una modificación cerca de las paredes superior e inferior, por transferencia de momento lineal, generando la aparición de regiones de elevado momento lineal desplazadas hacia el radio interior del ducto.

Puede verse también que debido a esta asimetría del flujo medio, el gradiente de velocidad principal sobre la pared exterior resulta mayor que el correspondiente a la pared interior; este efecto se atenúa a medida que el radio medio aumenta y la distribución tiende a desplazarse hacia el centro de la sección.

Además, debido al desplazamiento del máximo de velocidad hacia el centro, los gradientes de velocidad en la dirección vertical de las paredes superior e inferior disminuyen a medida que se consideran radios medios mayores. Ya que las distribuciones se encuentran normalizadas con la velocidad media, los valores máximos no difieren significativamente entre las distintas figuras.

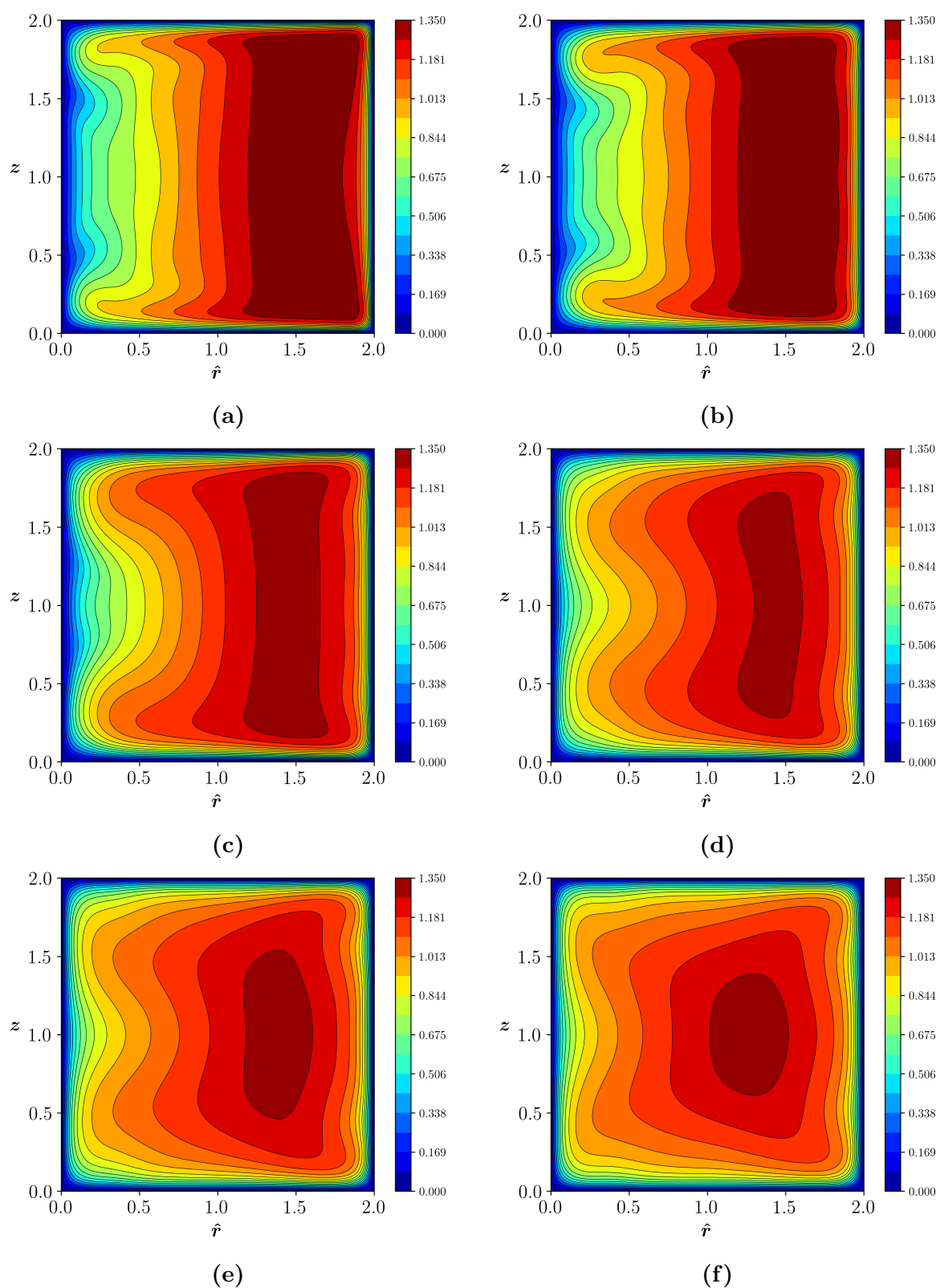


Figura 5.4: Velocidad principal \overline{u}_θ adimensionalizada con la velocidad media u_b , (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

5.4. Flujo secundario

En la figura 5.5 se muestran los patrones de flujo secundario medio, representados por los vectores de velocidad secundaria sobre la sección. En la mitad superior de las secciones los vectores poseen módulo unitario, y se busca visualizar el sentido de rotación y tamaño relativo de las celdas de recirculación que aparecen. En la mitad inferior los vectores se encuentran normalizados con el módulo máximo de cada caso; de esta forma se puede apreciar la intensidad relativa de las celdas de recirculación.

La importancia del flujo secundario de primer tipo relativa al flujo medio depende de la curvatura del ducto. A medida que se aumenta el radio medio, la componente de vorticidad en la dirección del flujo disminuye, y por lo tanto también lo hace la magnitud del flujo secundario de primer tipo. El flujo secundario de segundo tipo depende de la turbulencia y es esperable que sea más apreciable para valores de número de *Reynolds* crecientes, es decir, para valores crecientes del radio medio.

Puede observarse que para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$ existen esencialmente dos celdas de recirculación contrarrotantes mayoritarias, una de sentido antihorario en la mitad superior de la sección, y otra de sentido horario en la inferior. Estos vórtices transportan fluido desde el radio exterior al interior, modificando el flujo medio en concordancia con lo observado en la figura 5.4. La circulación en sentido contrario, por el interior de la sección tiene una magnitud menor. Además, las celdas de recirculación se cierran por el interior de la sección transversal pero lo hacen cerca de las paredes, provocando que el flujo secundario en la región central de la sección sea minoritario.

En el caso $R_m = 10$ se observa también una segunda celda de recirculación sobre el radio exterior, cuya importancia relativa es menor respecto a la celda principal; esta celda desaparece en los casos posteriores y su análisis se posterga para el final de este capítulo.

A medida que se consideran radios medios mayores, el patrón de flujo secundario se complejiza y aparecen nuevas celdas. Para el caso $R_m = 50$ las celdas primarias aumentan su tamaño respecto a los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, y el flujo secundario en la dirección radial por la región central del ducto se incrementa. Además, aparecen dos nuevos vórtices sobre la pared exterior, de importancia menor a las celdas principales, los cuales aumentan su importancia en los casos siguientes. En el caso $R_m = 150$ aparecen dos nuevas celdas en los vértices izquierdos, sobre las paredes superior e inferior. Finalmente en el caso $R_m = 250$ se ven ocho celdas de recirculación bien definidas. Se observan las celdas que aparecen en los casos $R_m = 50$ y $R_m = 150$, con tamaños y magnitudes semejantes, y dos celdas adicionales contrarrotantes a las del caso $R_m = 50$, que transportan fluido hacia los vértices derechos por las bisectrices.

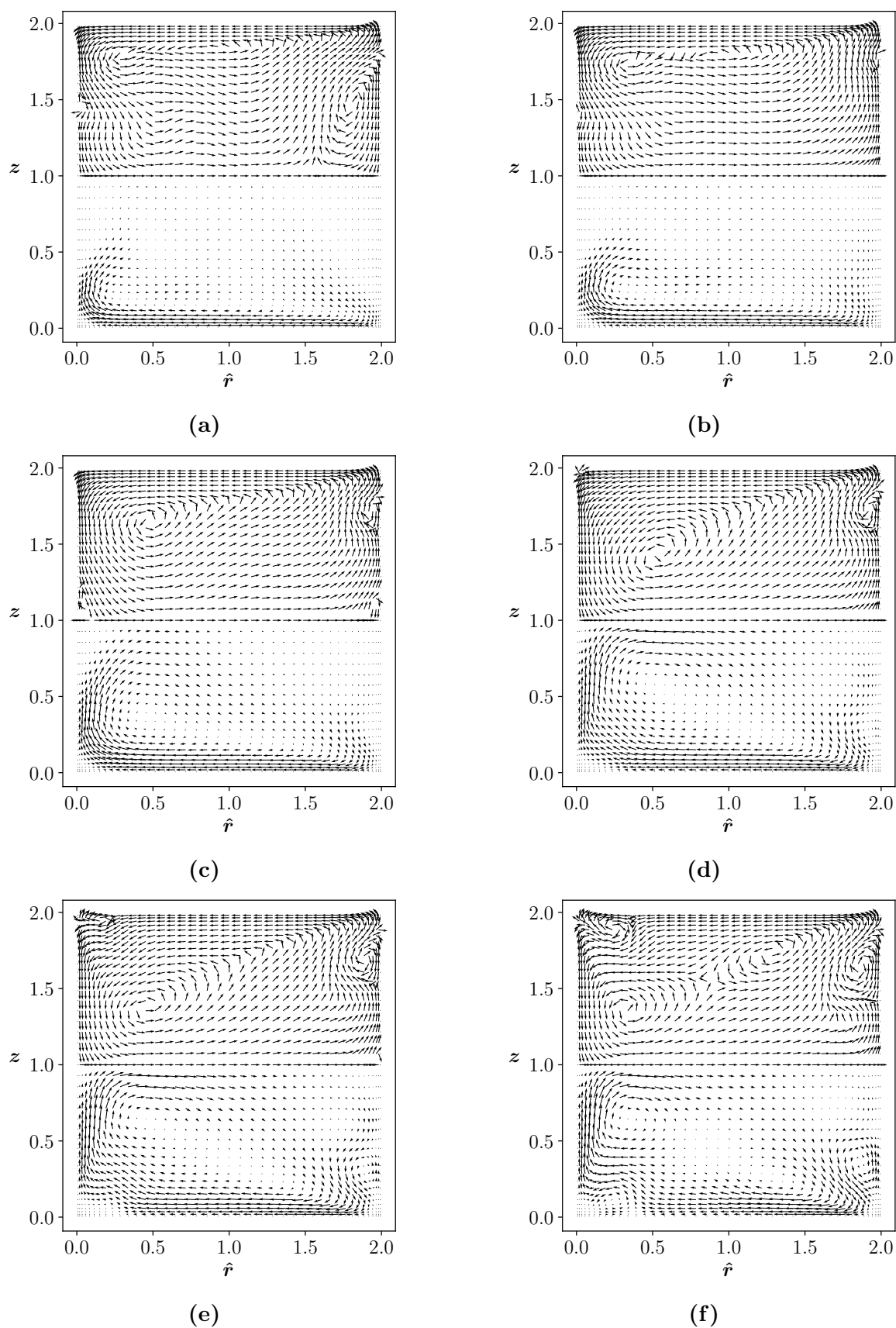


Figura 5.5: Vectores de flujo secundario medio, en la mitad superior los mismos tienen módulo unitario, en la mitad inferior están normalizados con el valor máximo de cada una de las secciones, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

Se observan también dos celdas sobre el radio interior, cercanas a $z = 1$, y una circulación primaria en el mismo sentido que en el caso $R_m = 10$ o $R_m = 30$. En un ducto recto se esperan ver dos vórtices contrarrotantes en cada uno de los vértices de la sección [12], por lo que se puede concluir que en el caso $R_m = 250$ se observa una interacción entre estos ocho vórtices de flujo secundario de segundo tipo, con el flujo de primer tipo caracterizado por la recirculación primaria, obteniéndose un patrón en el que los vórtices de menor tamaño se encuentran desplazados en el sentido del flujo secundario de primer tipo, respecto a un ducto recto. Esto se debe a que para el caso $R_m = 250$, las contribuciones al flujo secundario de la vorticidad y de la turbulencia resultan comparables.

En las figuras 5.6 y 5.7 se muestran las velocidades radial $\overline{u_r}$ y vertical $\overline{u_z}$, respectivamente, ambas adimensionalizadas con la velocidad media, u_b . Puede verse que el mínimo global de la velocidad radial ocurre en el caso $R_m = 10$ cerca de las paredes superior e inferior, en donde la circulación desde el radio interior al exterior tiene mayor módulo. En el caso $R_m = 10$ puede verse una región de velocidad radial negativa y bajo módulo sobre la pared exterior; esta región es generada por el vórtice de menor intensidad sobre la derecha anteriormente nombrado, el cual tiene un efecto minoritario sobre el flujo medio, transportando fluido desde la pared hacia el centro de la sección, lo que provoca que la región de velocidad $\overline{u_\theta}$ máxima se desplace levemente a la derecha cerca de $z = 1$, como puede verse en la figura 5.4a.

El caso $R_m = 50$ presenta un cambio de comportamiento respecto a la velocidad radial en el centro de la sección. Como se comentó anteriormente, primero se produce un incremento de esta componente, debido a que las celdas de recirculación aumentan de tamaño, abarcando una porción considerable de la sección, como puede verse en el caso $R_m = 100$, en el que los módulos de velocidad radial en el centro del ducto y sobre las paredes resultan aproximadamente iguales.

Luego los valores de la velocidad radial disminuyen progresivamente a medida que se aumenta el radio medio, debido a que la contribución de la curvatura al flujo secundario se ve atenuada. Para los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$ se observan contornos de velocidad radial más complejos que los que se observan en los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, debido a que se vuelve apreciable el flujo secundario de segundo tipo y la contribución de ambos efectos se vuelve comparable. En este último caso se observa también que la recirculación de mayor intensidad es la asociada al flujo secundario de primer tipo.

La figura 5.7 muestra que de forma general, la velocidad vertical se orienta desde la horizontal central de la sección hacia las paredes superior e inferior en el radio exterior, y en sentido contrario en el radio interior. Para el caso $R_m = 10$ existe una región sobre el radio exterior que se orienta en sentido contrario, representativa del par de vórtices adicionales. Los valores extremos se dan en cada caso sobre el radio interior, y su valor

respecto a la velocidad media se ve atenuado a medida que el radio medio aumenta.

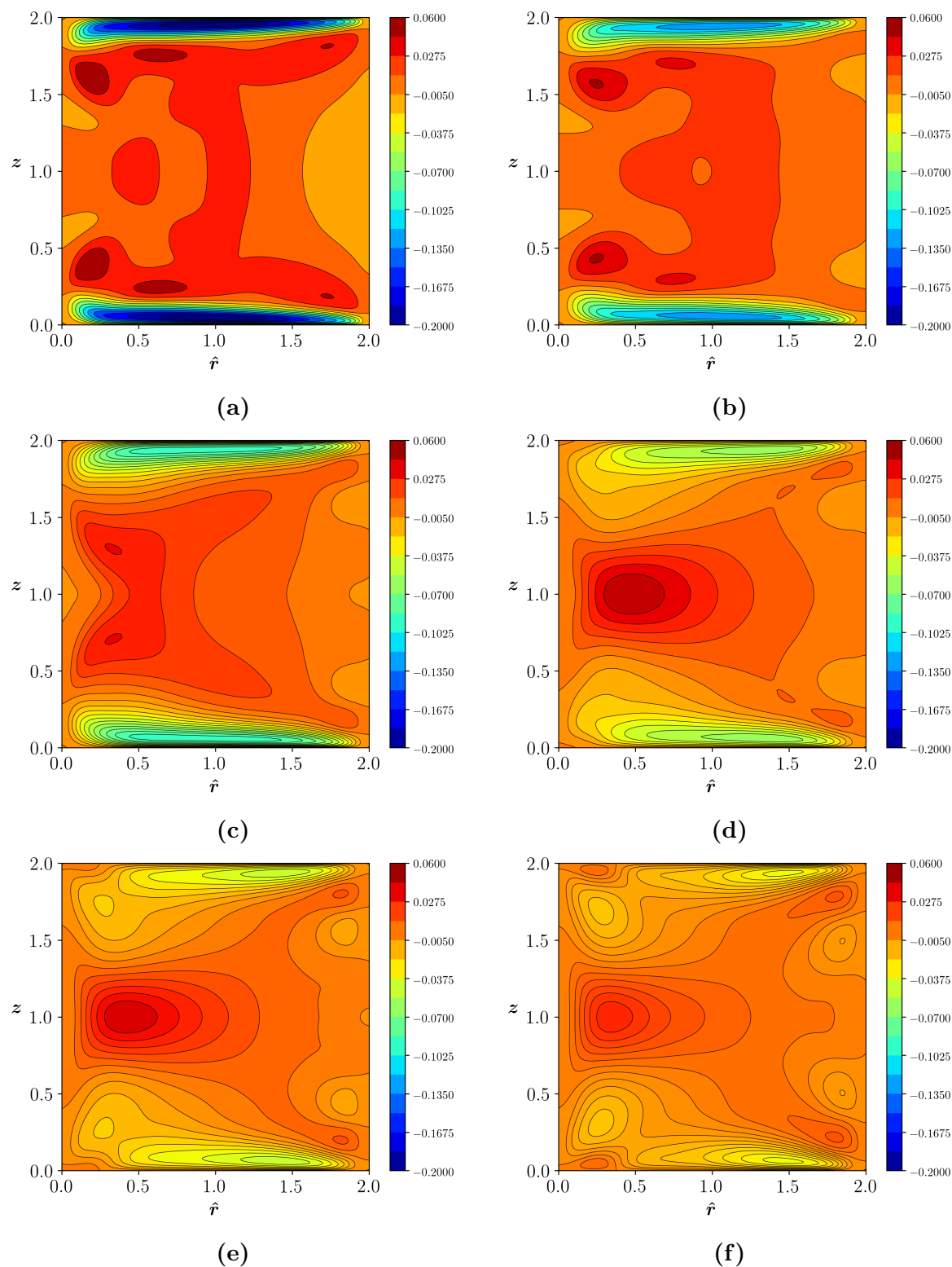


Figura 5.6: Velocidad radial \bar{u}_r adimensionalizada con la velocidad media u_b , (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

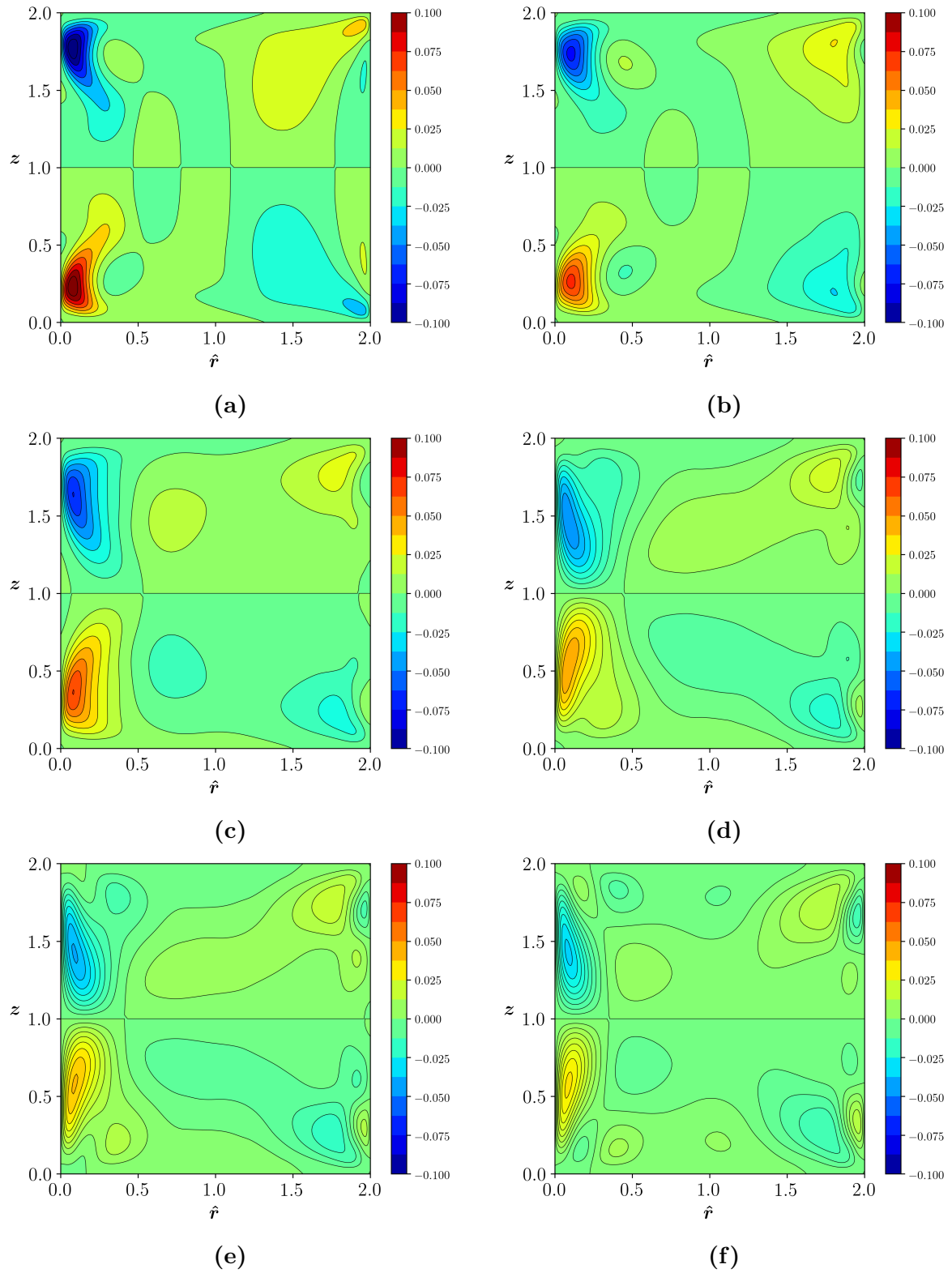


Figura 5.7: Velocidad vertical $\overline{u_z}$ adimensionalizada con la velocidad media u_b , (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

Se ve también que las celdas de recirculación no son simétricas respecto a la línea vertical central, sino que el flujo secundario de primer tipo transporta parcelas de

fluido hacia las paredes superior e inferior en regiones donde $\hat{r} > 1.5$, las cuales son advectadas hacia el radio interior; luego este fluido desciende en una región muy cercana a la pared interior, dando lugar a la forma de los contornos de velocidad vertical.

Se observa que para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, la velocidad vertical en la región central cerca de la pared interior es aproximadamente cero, mientras que para los casos $R_m = 100$ en adelante la circulación sobre dicha pared transporta fluido hasta el centro de la sección, por lo que los contornos de velocidad hacia el centro de la sección se incrementan de tamaño.

La existencia de vórtices de menor tamaño, producto de la turbulencia tiene un efecto minoritario pero no despreciable sobre el flujo medio. Los vórtices cercanos a las paredes que aparecen progresivamente y que se observan claramente en el caso $R_m = 250$ tienden a transferir momento lineal hacia los vértices de la sección, por las bisectrices de la misma. Este fenómeno genera una distorsión en los contornos de flujo medio que es apreciable al comparar la distribución de velocidad media sobre los vértices izquierdos en los casos $R_m = 100$ y $R_m = 250$, en la figura 5.4. Este efecto de distorsión se vuelve más apreciable a medida que el efecto del flujo secundario de primer tipo se ve atenuado.

La figura 5.8 muestra perfiles de velocidad radial y vertical, calculados en $\hat{r} = 1$ y en $z = 1.5$, respectivamente. En este caso los resultados se muestran adimensionalizados con la escala de velocidad, $u_{\tau,avg}$. Se puede ver en la figura 5.8a que la velocidad negativa hacia el radio interno disminuye en módulo a medida que se aumenta el radio medio. En contraposición, los valores de velocidad en sentido contrario por el interior de la sección se incrementan en el caso $R_m = 100$ respecto a los anteriores, alcanzando un valor máximo. En los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$ la velocidad radial en ambos sentidos presenta valores absolutos semejantes.

Observando esta figura se deduce que la importancia relativa del flujo secundario respecto al flujo medio disminuye a medida que aumenta el radio medido debido a dos mecanismos. En primera instancia, para mayores valores del radio medio, la velocidad media u_b , aumenta como se indica en la tabla 5.1, pero también existe una disminución neta de la magnitud de las velocidades secundarias, comparadas utilizando la escala de velocidad $u_{\tau,avg}$; ambos efectos contribuyen a la disminución de la intensidad del flujo secundario.

Resulta importante notar que si bien la velocidad radial es mayor hacia el radio interior que hacia el radio exterior, al integrar los perfiles de esta componente, vistos en la figura 5.8a, sobre la altura de la sección, se obtienen valores que no difieren significativamente de 0 para todos los casos. Esto se debe a que la velocidad radial positiva es menor, pero ocupa una mayor porción de la sección, e implica que una parcela de fluido que es trasladada por el flujo secundario de primer tipo hacia el radio interior, retornará al

radio exterior en lugar de ser advectada en la dirección angular por el flujo principal, aunque lo hará con una velocidad menor.

Respecto a la velocidad vertical, en la figura 5.8b se ve que para el caso $R_m = 50$ existe un cambio del patrón de flujo secundario, que se traduce en un aumento en valor absoluto de la velocidad cerca de la pared interior. Este cambio luego se ve dismiuido para los casos siguientes debido a la pérdida de intensidad de flujo secundario. La diferencia en la velocidad vertical entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 50$ no implica que el flujo secundario aumente su intensidad, sino que es consecuencia de que las celdas de recirculación se cierran cerca de $z = 1.5$ para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, mientras que para los casos $R_m = 50$ en adelante, las parcelas de fluido tienen una velocidad vertical tal que alcanzan el centro de la sección.

Puede verse también que para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 250$, la velocidad vertical sobre la pared derecha es negativa. En el primer caso es producto de los vórtices que luego desaparecen en los casos siguientes, y en el segundo caso lo que se está observando es la celda de recirculación de segundo tipo.

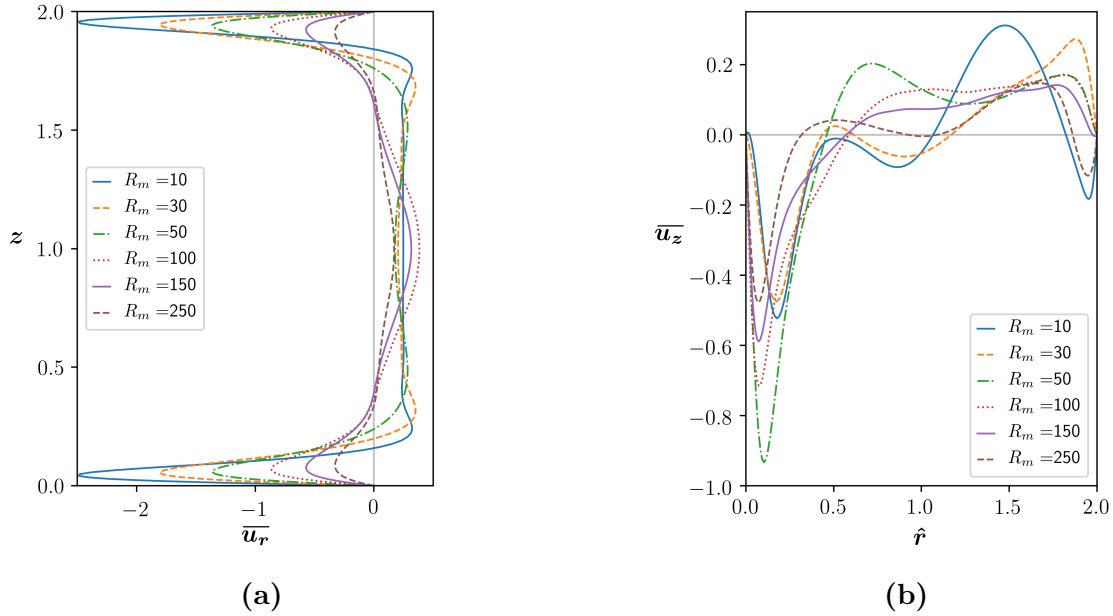


Figura 5.8: (a) Velocidad $\overline{u_r}$ en función de la coordenada vertical, calculada en $\hat{r} = 1$, (b) Velocidad $\overline{u_z}$ en función del radio, calculada en $z = 1.5$.

Como último resultado asociado al flujo medio, en la figura 5.9 se muestran contornos de intensidad de flujo secundario, es decir, contornos de $\sqrt{\overline{u_r}^2 + \overline{u_z}^2}$ normalizados con la velocidad media.

Se observa que los valores máximos disminuyen considerablemente entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 50$; estos valores maximos se dan cerca de las paredes superior e inferior en estos casos. Para radios mayores la configuración del flujo secundario se modifica y los

valores máximos cerca de las paredes y en el centro se vuelven comparables.

De forma global se puede decir que el flujo secundario aumenta en magnitud en el centro de la sección, entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 100$, y luego disminuye progresivamente para los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$. En la tabla 5.3 se muestran el valor máximo del flujo secundario sobre la sección, representado como un porcentaje del flujo medio.

R_m	$máx(\sqrt{\overline{u_r}^2 + \overline{u_z}^2}/u_b)$
10	21.8 %
30	13.3 %
50	9.30 %
100	6.20 %
150	4.60 %
250	3.30 %

Tabla 5.3: *Máximo valor del flujo secundario como un porcentaje de la magnitud del flujo medio principal, para cada caso simulado.*

Se puede ver que el flujo secundario alcanza un valor máximo superior al 20 % de la velocidad media, en concordancia con lo esperado para un flujo secundario de primer tipo. Resulta clara la fuerte dependencia de este flujo con el radio de curvatura. Para los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$, los valores máximos se encuentran en el orden esperado para flujos secundarios de segundo tipo. Para el caso de un ducto recto, la máxima velocidad sobre la sección corresponde aproximadamente a un 2 % de la media [19], por lo que se puede concluir que la contribución del flujo secundario de primer tipo en el caso $R_m = 250$ sigue siendo apreciable.

5.5. Distribución de corte en las paredes

En la figura 5.10 se muestra la distribución de la tensión de corte $\tau_{r\theta}$ (las expresiones del tensor de tensiones se indican en el apéndice A.3) para las paredes izquierda y derecha. En la pared izquierda puede verse en primera instancia, que el valor máximo de la tensión de corte aumenta al incrementar el radio medio, esto se debe a que al desplazarse el máximo de velocidad $\overline{u_\theta}$ hacia el centro del ducto, y a la vez aumentar la velocidad media, el resultado global es un incremento en la derivada de $\overline{u_\theta}$ respecto al radio sobre esta pared.

Para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$ se observan dos máximos locales a una distancia aproximada de 0.2 de las paredes, y luego una región de corte aproximadamente uniforme sobre el centro de la pared, en la pared izquierda.

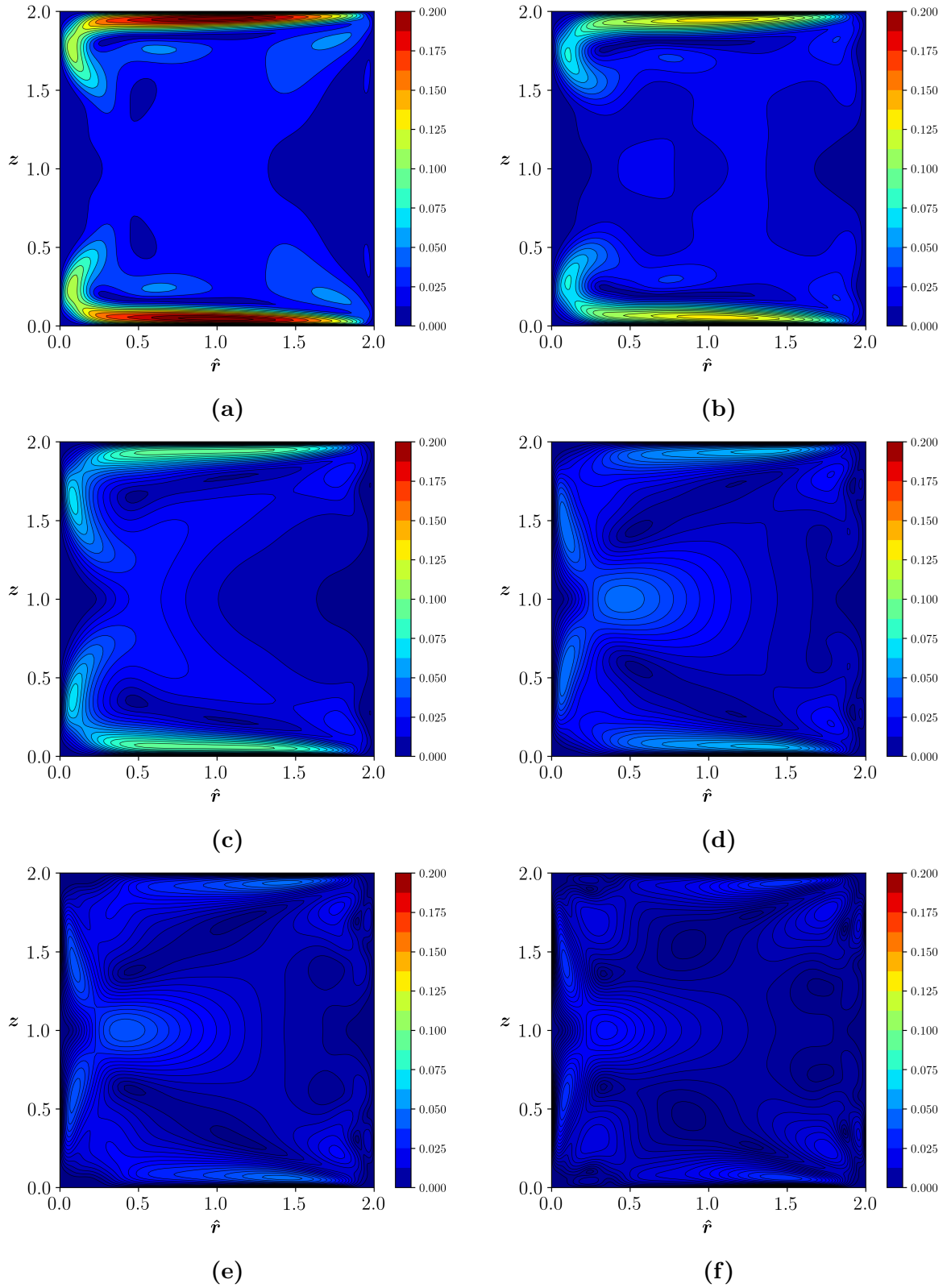


Figura 5.9: Magnitud del flujo secundario $\sqrt{\overline{u_r^2} + \overline{u_z^2}}$ adimensionalizada con la velocidad media u_b , (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

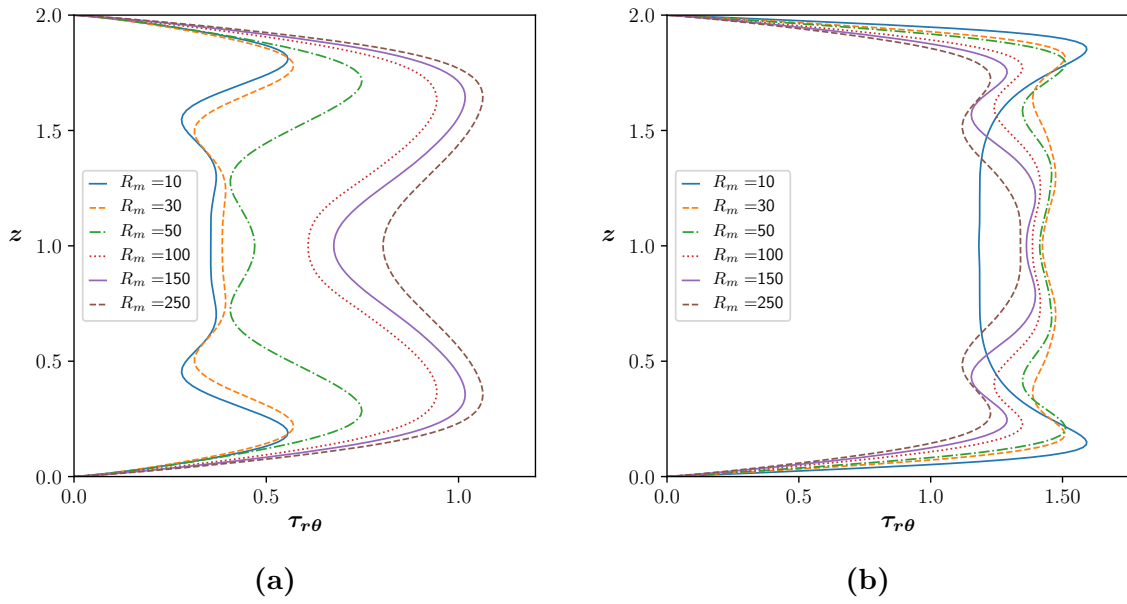


Figura 5.10: Tensión de corte en la dirección del flujo, $\tau_{r\theta}$ en las paredes verticales, (a) izquierda y (b) derecha.

Estos máximos se deben a la transferencia de momento por flujo secundario de primer tipo hacia los vértices izquierdos del ducto. La región central presenta un corte uniforme debido a que el flujo medio resulta uniforme en esta región, como consecuencia de que las celdas de recirculación generen un retorno de fluido cerca de las paredes y no por el centro de la sección.

Para el caso $R_m = 50$ y los posteriores, los máximos locales se desplazan hacia el interior del ducto y en el caso $R_m = 250$ se ubican a una distancia de 0.35 de las paredes. Este desplazamiento es producto de la modificación de tamaño de las celdas de recirculación. Como las celdas llegan a ocupar toda la sección transversal, la zona de tensión de corte uniforme de la región central de la pared desaparece. Se observa también un máximo local para el caso $R_m = 50$ que luego desaparece, este fenómeno puede explicarse observando la figura 5.6d (caso $R_m = 100$), en la que se muestra un incremento en la velocidad radial hacia la pared exterior por la mitad de la sección, extrayendo momento lineal de regiones cercanas a la pared izquierda y atenuando el incremento local de la tensión de corte que se ve en caso $R_m = 50$.

Respecto a la pared derecha, se observa que los valores máximos de tensión de corte disminuyen a medida que se aumenta el radio medio entre los casos $R_m = 30$ y $R_m = 250$, a diferencia de lo ocurrido en la pared izquierda. Esto se debe principalmente a que si bien la velocidad $\overline{u_\theta}$ se incrementa con el radio, también se desplaza el máximo hacia el centro del ducto, disminuyendo la pendiente cerca de la pared. En este caso también se observan los máximos locales cerca de las paredes superior e inferior comentados anteriormente, los cuales se desplazan nuevamente hacia el centro de la sección a medida

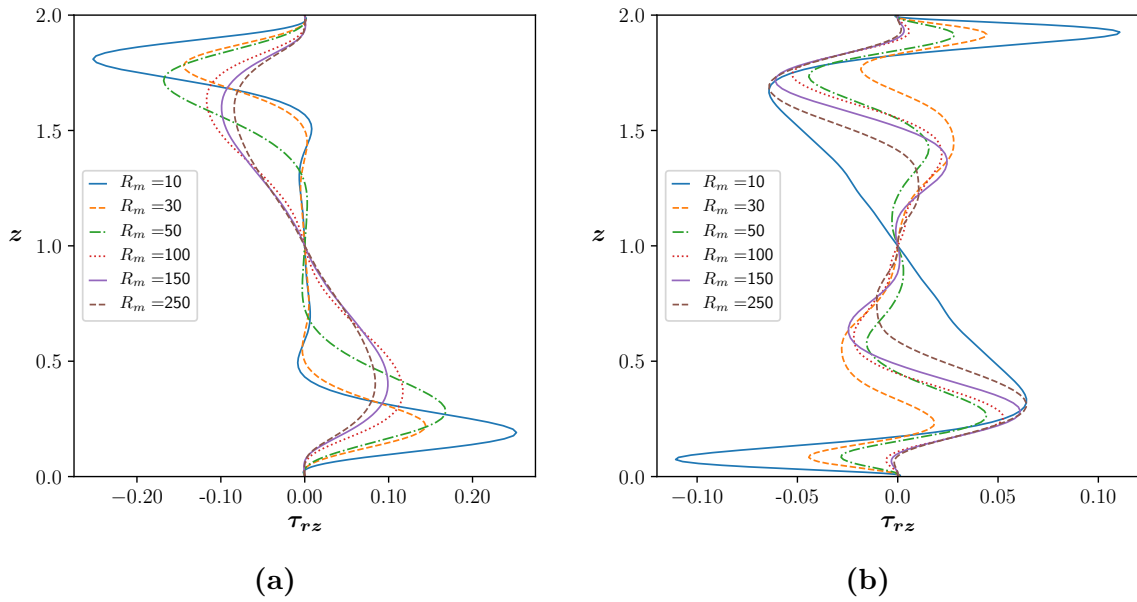


Figura 5.11: Tensión de corte τ_{rz} en las paredes verticales, (a) izquierda y (b) derecha.

que se aumenta el radio medio.

Se puede ver que para el caso $R_m = 10$ el comportamiento difiere cualitativamente respecto de los otros casos. Existe una región de tensión de corte aproximadamente uniforme, con un valor menor que los otros casos, por la interacción con el flujo medio de los vórtices que existen sobre el radio exterior, que desaparecen para radios medios superiores a $R_m = 10$.

En la figura 5.11 se muestra la tensión de corte τ_{rz} sobre las paredes verticales. Sobre la pared derecha, a diferencia de la tensión $\tau_{r\theta}$ en este caso los valores extremos disminuyen al aumentar el radio medio, debido a que esta tensión depende exclusivamente de la intensidad del flujo secundario. También puede verse que para el caso $R_m = 10$ existe una región de tensión de corte aproximadamente nula en la región central de la pared, a causa de la ausencia de flujo secundario. Esta región desaparece para los casos $R_m = 100$ a $R_m = 250$.

En cuanto a lo ocurrido en la pared derecha, se observan valores extremos locales cerca de las paredes superior e inferior que son importantes para los casos $R_m = 10$, $R_m = 30$ y $R_m = 50$, representativos del flujo secundario de primer tipo que transfiere parcelas de fluido hacia estas paredes. A partir del caso $R_m = 100$ y posteriores, se vuelven más importantes los valores extremos en el sentido contrario a los anteriores, que se ubican en regiones más alejadas de las paredes superior e inferior, y son representativos del incremento de intensidad de las celdas de recirculación de segundo tipo; estas aumentan a medida que se incrementa el radio medio. Para el caso $R_m = 10$ es notable la influencia de los vórtices adicionales sobre el radio en la tensión de corte.

En la figura 5.12 se muestran las tensiones de corte $\tau_{z\theta}$ y τ_{rz} en las paredes superior e inferior. Puede verse que para los casos $R_m = 10$, $R_m = 30$ y $R_m = 50$ el valor de $\tau_{z\theta}$ aumenta monótonamente desde el radio interior al exterior, debido al desplazamiento de regiones de mayor momento lineal hacia la derecha, por efecto de la aceleración centrípeta. Existe en todos los casos un máximo en el cuarto externo de la sección, el cual disminuye para los radios medios mayores. Para el caso $R_m = 100$ se observa un punto de inflexión de la curva cerca de $\hat{r} = 0.4$ que se transforma en un máximo local para los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$; este se debe a la existencia de vórtices de segundo tipo sobre el radio interior en estos casos.

Respecto a la componente τ_{rz} se observan valores negativos y decrecientes en valor absoluto para los casos $R_m = 10$ a $R_m = 100$, producto de la disminución de intensidad de la circulación secundaria en dirección radial, dirigida hacia el radio interno. Para los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$ aparecen regiones de tensión de corte positiva generadas nuevamente por las celdas de segundo tipo, que adquieren una importancia relativa considerable.

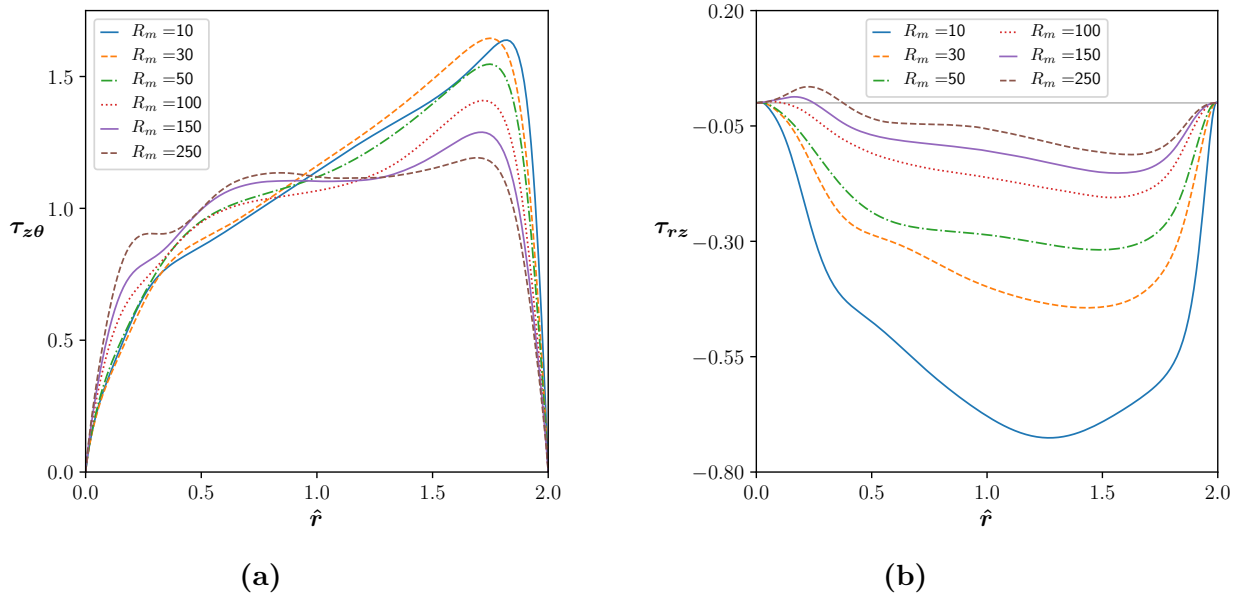


Figura 5.12: Tensiones de corte en las paredes superior e inferior, (a) $\tau_{z\theta}$ y (b) τ_{rz} .

5.6. Turbulencia

5.6.1. Valores instantáneos

Antes de analizar propiedades del flujo turbulento, se muestran en la figura 5.13 valores instantáneos de la velocidad principal para los casos $R_m = 10$, $R_m = 50$ y $R_m = 250$, debido a que son estos los que muestran una mayor diferencia relativa.

A la izquierda pueden verse los valores absolutos de la velocidad, mientras que a la derecha se muestra la diferencia entre los valores instantáneos y la media, es decir, $u_\theta - \overline{u_\theta}$. Se puede ver que a medida que el radio medio aumenta, la ubicación de las regiones de velocidad máxima se desplaza hacia la derecha, y los valores máximos aumentan. La diferencia entre los valores instantáneos y el valor medio permite apreciar la ubicación de los vórtices turbulentos. Para el caso $R_m = 10$, las perturbaciones del flujo principal respecto al flujo medio resultan aproximadamente nulas en la región cercana al radio interior, salvo sobre las paredes superior e inferior, en donde es importante el flujo secundario. Además, existe una región de perturbaciones importantes cerca de la pared exterior.

La diferencia entre los valores máximos de los casos $R_m = 50$ y $R_m = 250$ no es significativa, pero en el primero se observa una región de baja velocidad instantánea, cercana al radio interior y a la mitad de la altura de la sección. A su vez, las perturbaciones penetran progresivamente en el flujo medio, pudiendo observarse en el caso $R_m = 250$ una distribución de perturbaciones en todas las regiones de la sección transversal. Cabe aclarar que los valores absolutos máximos de estas perturbaciones no difieren significativamente entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 250$.

En la figura 5.14 se observan vectores representativos de los vórtices turbulentos sobre la sección transversal para un valor instantáneo del campo de velocidad. En este caso se encuentran graficados los contornos que se obtienen al considerar las perturbaciones de las velocidades secundarias, es decir, $u_r - \overline{u_r}$ y $u_z - \overline{u_z}$; de esta forma pueden independizarse los vórtices turbulentos de las celdas de recirculación de flujo secundario.

Se observa que para el caso $R_m = 10$ se forman vórtices en la región externa de la sección, y sobre la mitad de la altura del canal, salvo por algunos vórtices presentes en las regiones de recirculación de flujo secundario, cuya intensidad es minoritaria. En el caso $R_m = 30$ aparece una mayor cantidad de estructuras, que alcanzan una mayor porción de la altura del canal, pero se presentan, todavía, mayoritariamente sobre el radio exterior. En el caso $R_m = 50$ comienzan a aparecer estructuras propias de la turbulencia en la región central y cerca del radio interior, no obstante el predominio de los vórtices exteriores es importante. Para los casos $R_m = 100$ a $R_m = 250$ se pueden observar vórtices de diversa intensidad que alcanzan a todas las regiones del flujo medio.

El hecho de que en el caso $R_m = 10$, en el que el flujo secundario de primer tipo es más importante, la existencia de vórtices se encuentre confinada en una sola región de la sección da la idea de que el flujo secundario debido a la vorticidad induce un mezclado turbulento adicional significativo, el cual se encuentra localizado por efecto de la fuerza centrífuga.

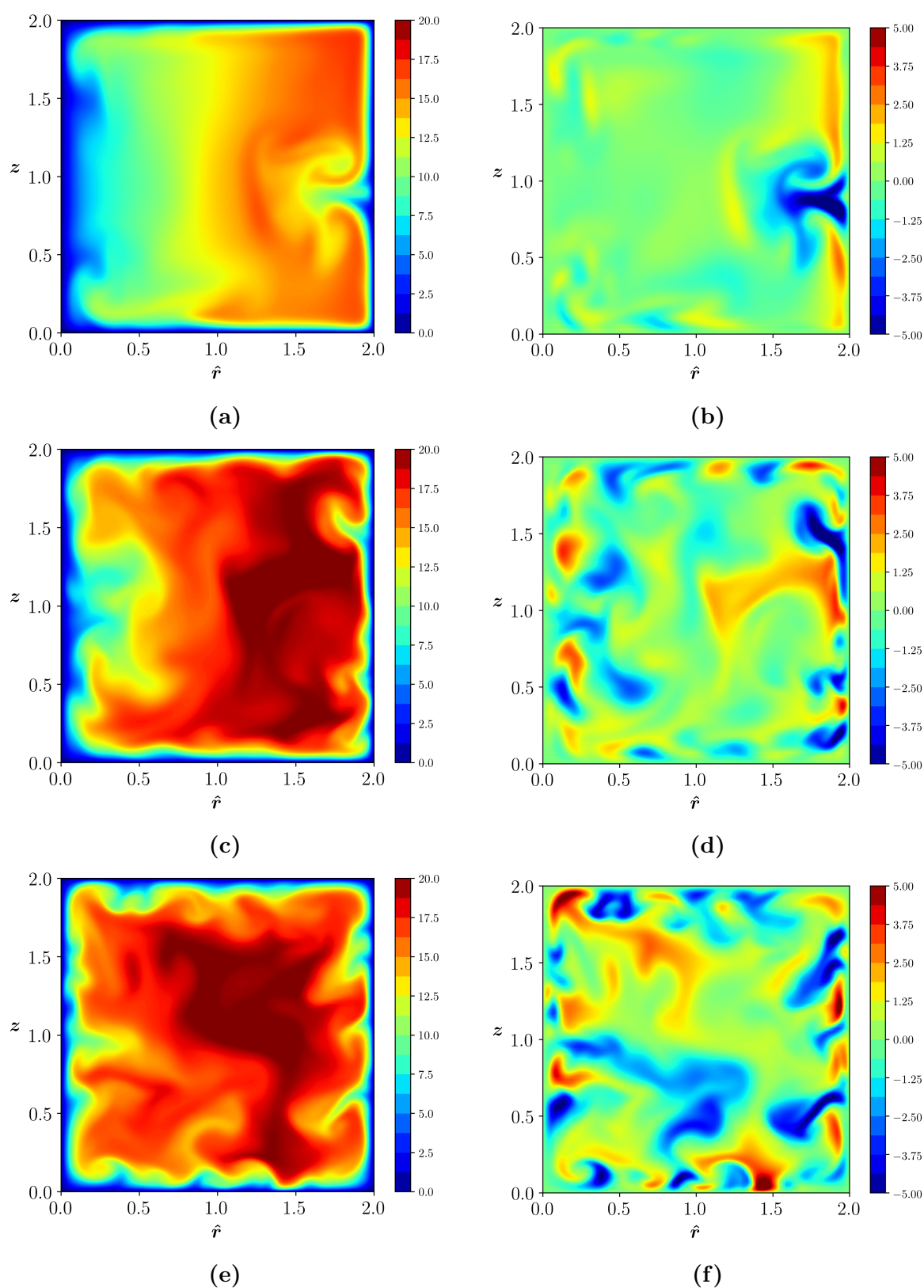


Figura 5.13: Valores instantáneos del flujo principal, para los casos 10 ((a) y (b)), 50 ((c) y (d)) y 250 ((e) y (f)). Las figuras a), c) y e) corresponden a valores absolutos, mientras que las b), d) y f) corresponden a la diferencia respecto de la media.

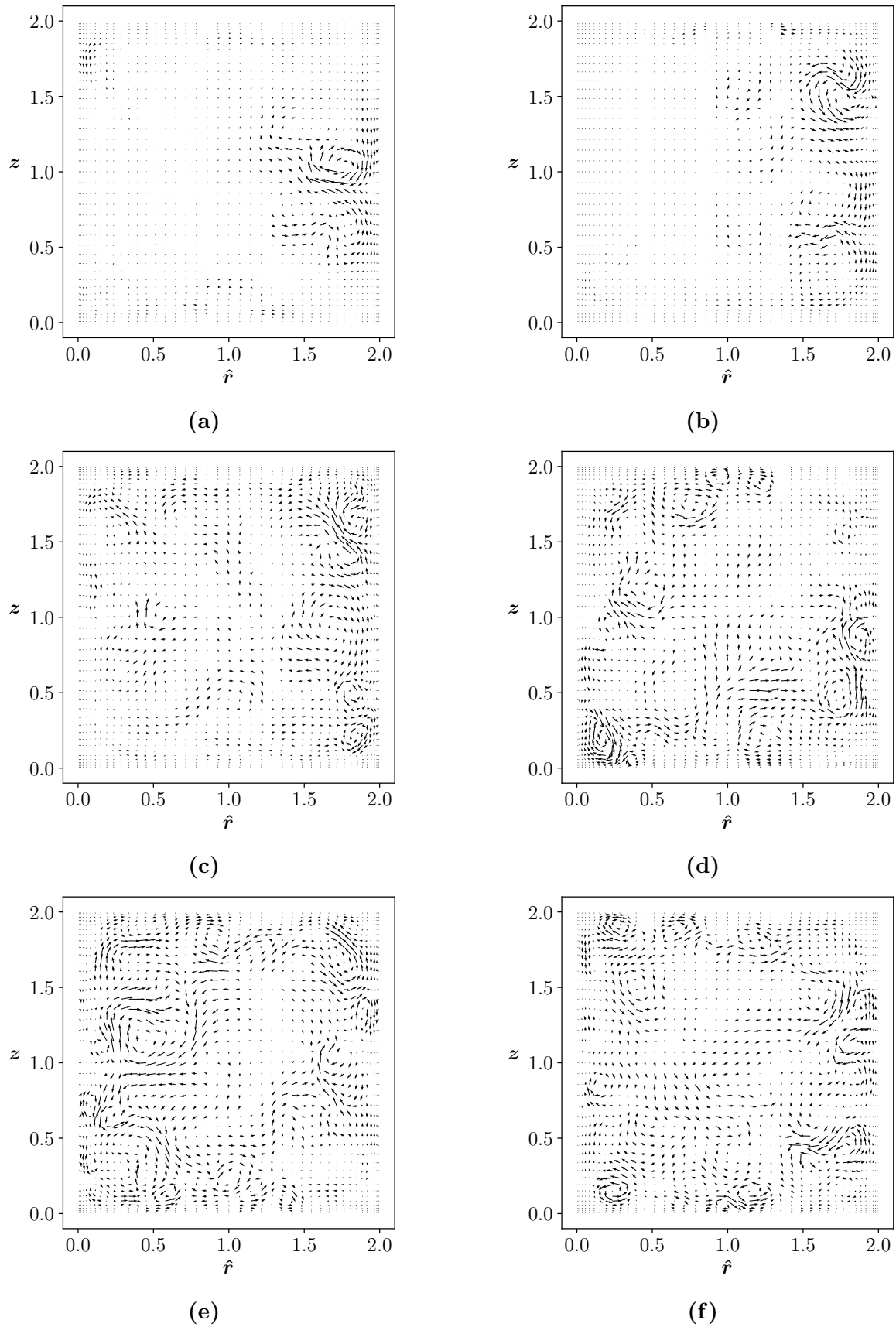


Figura 5.14: Patrones de flujo secundario instantáneo sobre la sección transversal para todos los casos estudiados. A los valores de las velocidades radial y vertical se les restaron sus valores medios para observar los vórtices sin las celdas de recirculación de flujo secundario, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

5.6.2. Intensidades turbulentas

En la figura 5.15 se pueden observar los valores cuadráticos medios (*rms*, por su sigla en inglés) de las perturbaciones de la velocidad principal, es decir $u_{\theta rms} = \sqrt{u_{\theta}^2}$. Estos valores se encuentran normalizados con la velocidad media, u_b ; de este modo las figuras indican la intensidad de las perturbaciones respecto al flujo medio.

En el caso $R_m = 10$ se observa que esta intensidad alcanza su valor máximo en la región cercana a la pared exterior, en donde aparecen vórtices turbulentos según se ve en la figura 5.14. Los gradientes de velocidad sobre la pared exterior no presentan cambios significativos para los distintos valores de radio medio, como puede verificarse en la figura 5.1, por lo que la disminución que se observa en la intensidad turbulenta es mayoritariamente debida al incremento en la velocidad media. Considerando los valores dados en la tabla 5.1, existe un incremento de aproximadamente 26 % en los valores de u_b entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 50$, mientras que los valores de $u_{\theta rms}/u_b$ máximos cerca del radio exterior disminuyen aproximadamente de 0.25 a 0.20, es decir, un 20 %. Este comportamiento indica que los valores *rms* absolutos son semejantes entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 50$.

Para radios medios bajos no hay perturbaciones importantes en el flujo principal en regiones alejadas de la pared exterior. Al observar los casos correspondientes a radios medios mayores se ve que estas intensidades turbulentas penetran hacia el interior de la sección, y se ven incrementadas en las paredes superior e inferior a medida que el flujo medio se vuelve menos asimétrico respecto de $\hat{r} = 1$.

Otro comportamiento que se puede ver es el asociado al flujo secundario de primer tipo; una parcela de fluido que es advectada hacia el radio interior, luego retorna por regiones cuya velocidad media son distintas, generando perturbaciones. En los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, en los que las celdas de recirculación se cierran cerca de las paredes, el efecto es minoritario, pero en los casos $R_m = 50$ y $R_m = 100$ existe un desplazamiento de partículas de elevado momento lineal hacia el centro del ducto (en regiones en donde la velocidad es menor), que tienden a perturbar el flujo medio incrementando los valores de intensidad turbulenta; el resultado es la región de perturbaciones moderadas sobre el radio interior que aparece en estos casos.

En el caso de un ducto recto, no se observan diferencias entre los valores *rms* cerca de las cuatro paredes. Por el contrario en los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$ puede verse que el flujo secundario desplaza hacia la izquierda las regiones de valores elevados cercanos a las tapas, y genera una penetración de las perturbaciones hacia el centro de la sección desde el radio interior.

En las figuras 5.16 y 5.17 se pueden ver los valores de u_{rms} y u_{zrms} , respectivamente, ambos adimensionalizados con la velocidad media. De forma general, se ve que

los valores máximos de estas perturbaciones se dan en el caso $R_m = 10$, y son aproximadamente 2.5 veces menos importantes que los valores máximos de $u_{\theta_{rms}}$ debido a que la producción de turbulencia aporta inicialmente energía a la componente u_θ , mayoritariamente.

Respecto a la intensidad $u_{r_{rms}}$, en el caso $R_m = 10$ se observa una región sobre el radio exterior, que abarca la porción central de la sección, en donde este valor es elevado. Esto se debe a la interacción de las celdas de recirculación minoritarias exteriores anteriormente comentadas, con los vórtices producidos por turbulencia en esta región. El máximo de intensidad presenta una disminución para los casos $R_m = 30$ y $R_m = 50$, nuevamente debida al aumento de velocidad media asociado a la disminución de la intensidad del flujo secundario de primer tipo.

En el caso $R_m = 50$ aparece una región de intensidades moderadas cerca del centro de la sección, que se traslada hacia la izquierda en el caso $R_m = 100$. La aparición de esta región se puede explicar con la aparición de una componente de velocidad radial no nula al cambiar el comportamiento del flujo secundario, considerando además que en el caso $R_m = 100$ la turbulencia parece alcanzar toda la sección transversal del ducto, según se ve en la figura 5.14d. A medida que esta velocidad disminuye su valor respecto al flujo medio por incremento del radio medio, esta región tiende a desaparecer.

En un ducto recto se esperan ver regiones de $u_{r_{rms}}$ máximas cerca de las paredes horizontales [20], en zonas donde el campo de velocidades posee dos componentes. Se observa en los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$ la aparición de estos máximos, con un valor mayor en el último caso, en donde el flujo secundario de primer tipo es menos importante. Esto último permite pensar que el flujo secundario por vorticidad estabiliza el flujo y tiende a atenuar la turbulencia en estas paredes. Además, se observan regiones no nulas de $u_{r_{rms}}$ cerca de las paredes verticales, que no deberían aparecer en un ducto recto, por efecto de la existencia de una recirculación en esta zona.

En el caso de los valores $u_{z_{rms}}$ se observan nuevamente regiones de altos valores para el caso $R_m = 10$ cerca del radio exterior, las cuales se atenúan para el caso $R_m = 30$ y $R_m = 50$. Estas regiones luego permanecen aproximadamente constantes en valor para los casos posteriores, ya que si bien disminuye la contribución de la fuerza centrífuga sobre esta pared, también se incrementa la velocidad media, y con ello aparecen perturbaciones de dos componentes (angular y vertical) en esta zona.

Además, a medida que el flujo se vuelve menos asimétrico, aparece una región de intensidad moderada cercana al radio interior, que aumenta de tamaño entre los casos $R_m = 50$ y $R_m = 100$, y luego tiende a disminuir en el caso $R_m = 150$. Debido a que en un ducto recto se esperaría ver dos regiones de valores máximos sobre las paredes verticales, se concluye que el caso $R_m = 250$ representa esta situación, modificada principalmente por el flujo secundario de primer tipo.

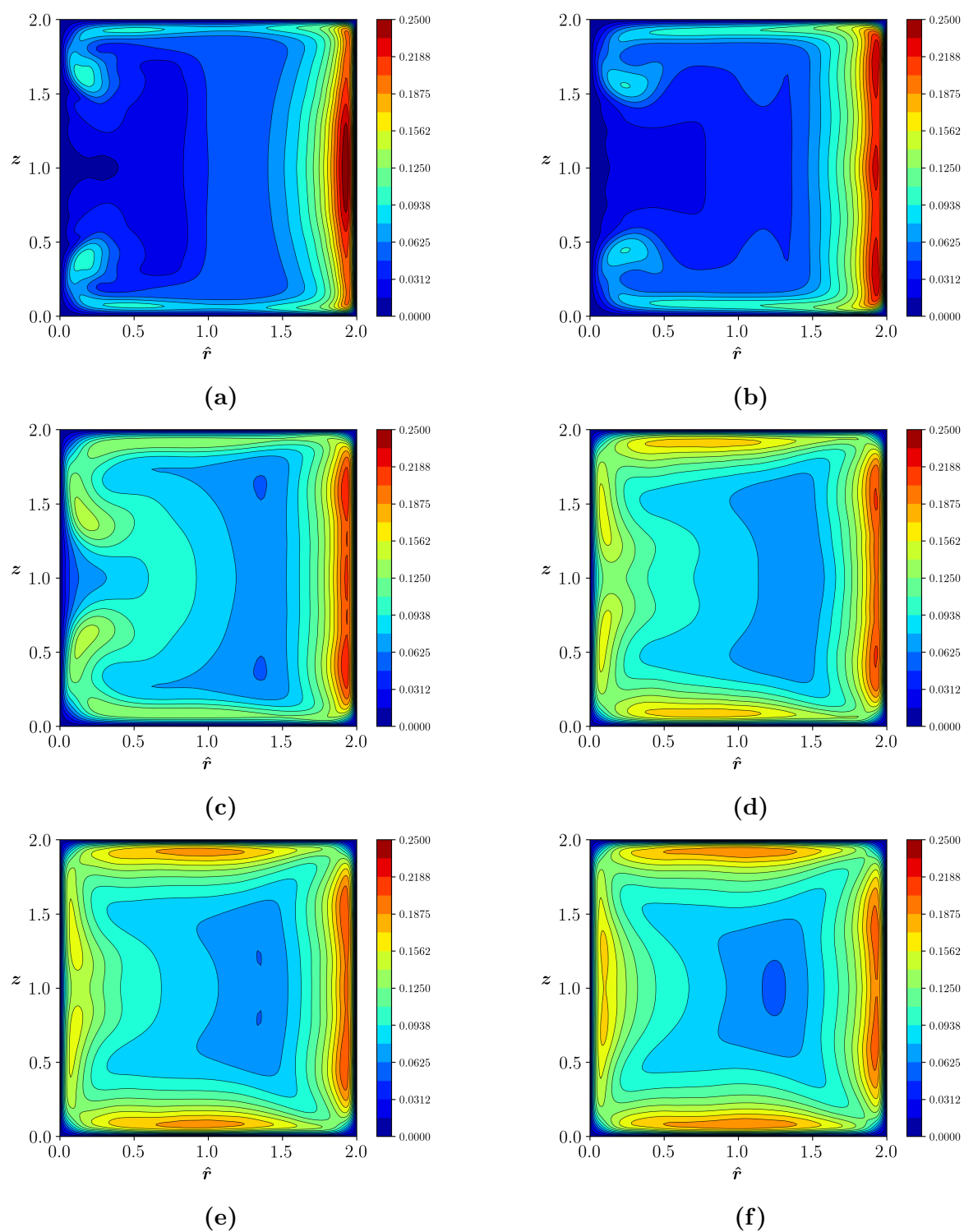


Figura 5.15: Valores cuadráticos medios $u_{\theta_{rms}}$, normalizados con la velocidad media al cuadrado de cada caso, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

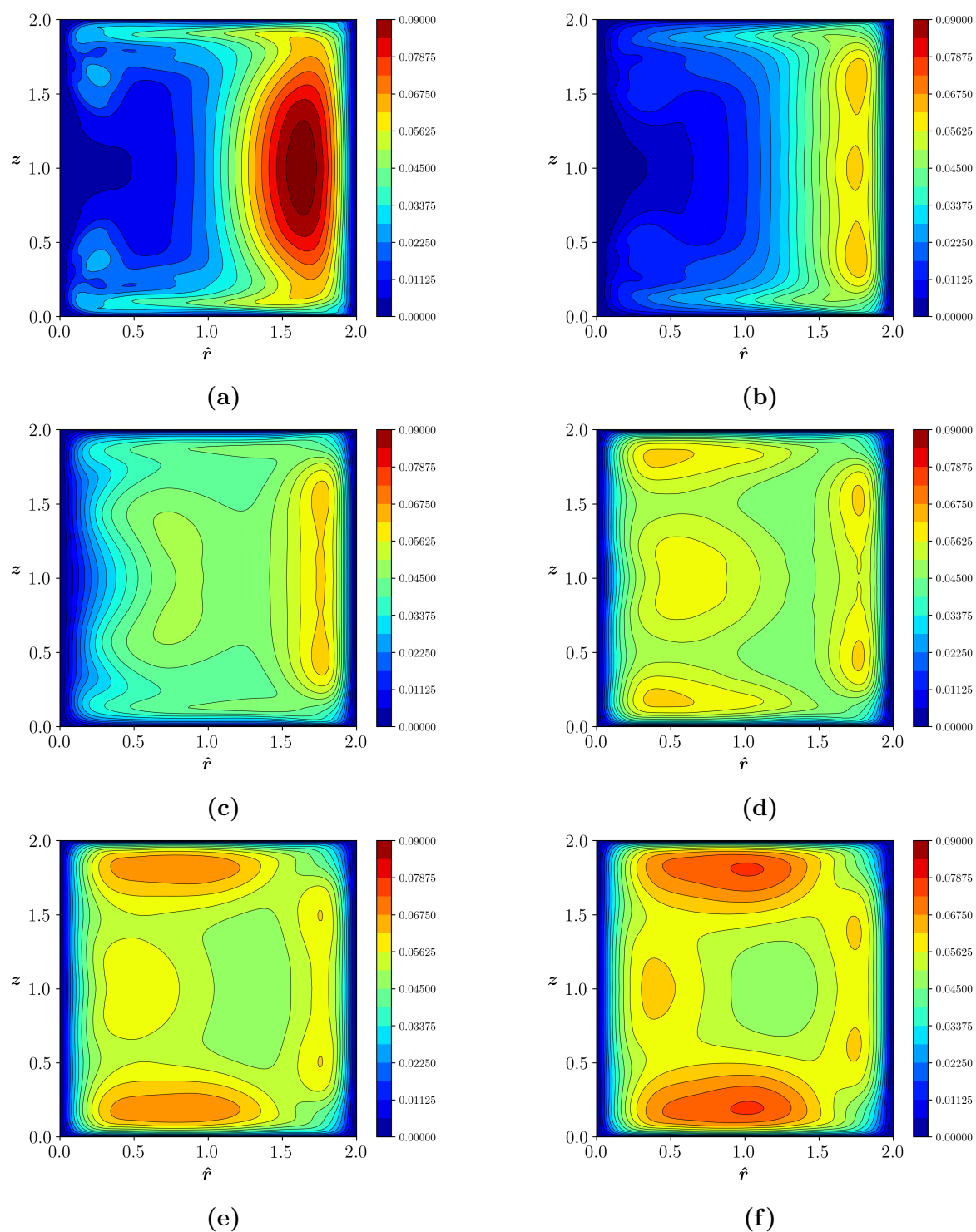


Figura 5.16: Valores cuadráticos medios u_{rms} , normalizados con la velocidad media al cuadrado de cada caso, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

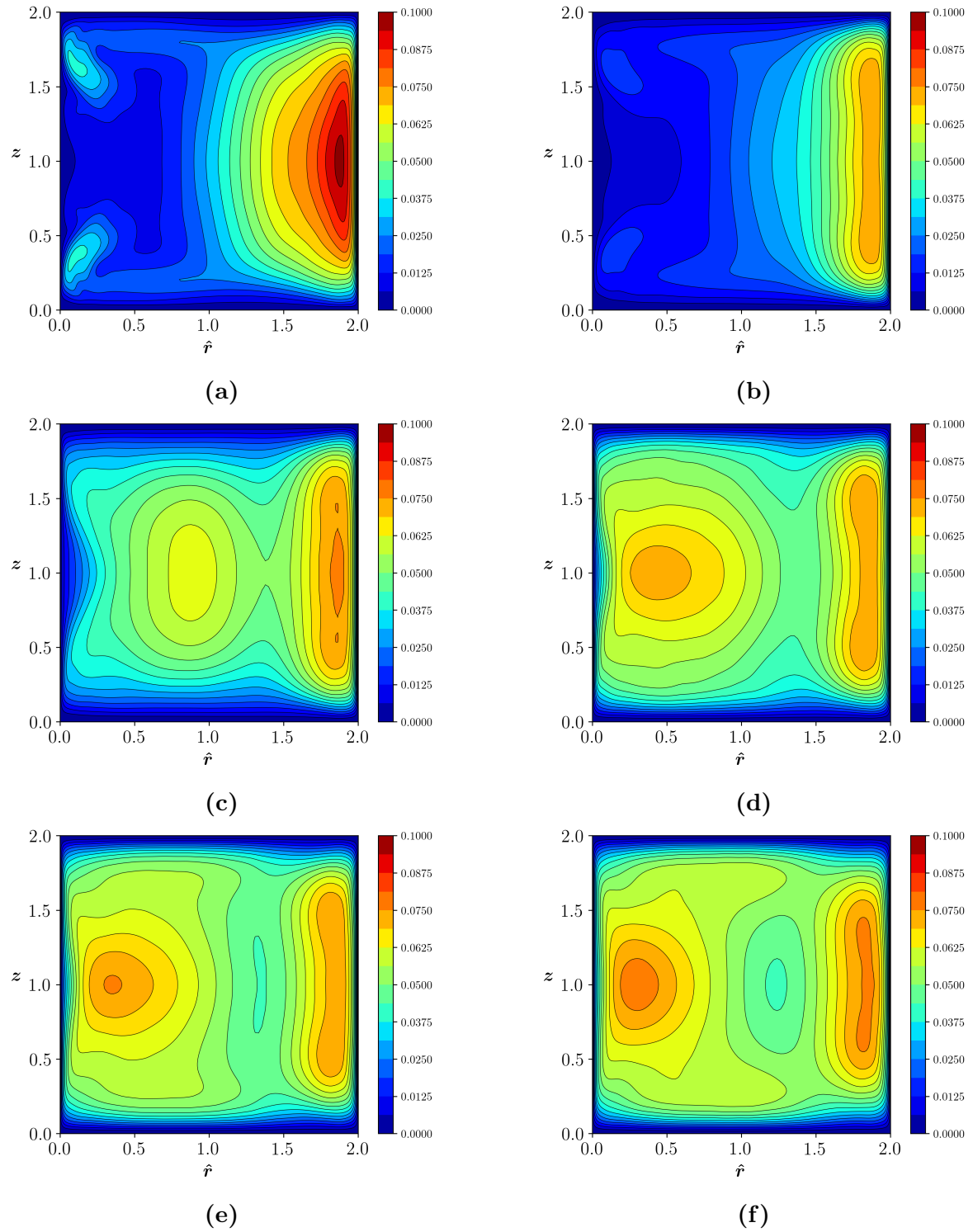


Figura 5.17: Valores cuadráticos medios $u_{z,rms}$, normalizados con la velocidad media al cuadrado de cada caso, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

Los resultados anteriores se encuentran normalizados con la velocidad media, que es una magnitud global del flujo. Este enfoque permite analizar cuán importantes son las intensidades turbulentas respecto al flujo medio en toda la sección. Sin embargo, si se

desea estudiar propiedades de la turbulencia en forma local cerca de una de las paredes, es necesario utilizar una escala de velocidad más adecuada, tal como la velocidad de corte local en dicha pared. Eso se debe principalmente a que al variar la contribución de la fuerza centrífuga para distintos radios medios, las velocidades de corte en las paredes cambian (tabla 5.1), y el fluido adyacente a la pared se comporta como si estuviera siendo impulsado por distintos forzados locales. En la figura 5.18 se pueden ver los valores rms del flujo sobre la línea media horizontal de la sección; los valores de la mitad izquierda se encuentran normalizados con la velocidad de corte local a la mitad del radio interior, y los valores de la mitad derecha con la escala correspondiente al radio exterior.

Respecto a los perfiles correspondientes a $u_{\theta rms}$, se ve que los valores aumentan sobre la mitad izquierda al incrementar el radio medio, pero los máximos sobre la mitad derecha no experimentan variaciones significativas. Existe también una diferencia cualitativa entre los casos $R_m = 10$ a $R_m = 30$, y los casos $R_m = 100$ a $R_m = 250$; en los primeros la intensidad no presenta un máximo cerca de la pared izquierda, mientras que para los segundos existe un valor máximo y luego una disminución para regiones más alejadas de la pared. El caso $R_m = 50$ presenta un máximo que se encuentra alejado de la pared, aproximadamente en $\hat{r} = 0.75$, el cual aparece por la modificación del tamaño de las celdas de flujo secundario de primer tipo anteriormente descripta, por lo que este máximo es de naturaleza distinta a los encontrados para los casos $R_m = 100$ en adelante, que resultan análogos a los máximos encontrados en la pared derecha.

Para la componente radial, existe una disminución de las intensidades entre los casos 100 a 250 en la pared izquierda, a diferencia del incremento de la componente angular. Además los valores máximos resultan ser menores. Cabe aclarar que el máximo para los casos $R_m = 100$, $R_m = 150$ y $R_m = 250$ se desplaza hacia la pared a medida que disminuye el flujo secundario de primer tipo. Esta descripción aplica también para la mitad izquierda de la figura correspondiente a $u_{z rms}$.

En la pared derecha existe una diferencia importante entre el caso $R_m = 10$ y los casos restantes respecto a la componente radial; la interacción entre los vórtices adicionales (figura 5.4a) y la turbulencia incrementa la intensidad en esta región, y al desaparecer dichos vórtices, la intensidad disminuye. Se observa también que los valores para los casos $R_m = 50$ a $R_m = 250$ no disminuyen monótonamente hasta el centro de la sección, debido a que el flujo secundario en la dirección radial no alcanza a anularse para ninguno de los casos. Para la componente vertical, en la mitad derecha se observa un valor máximo para el caso $R_m = 10$, que luego experimenta una disminución para el caso $R_m = 30$, una transición para el caso $R_m = 50$, y finalmente un crecimiento uniforme entre los casos $R_m = 100$ a $R_m = 250$. Este comportamiento se debe fundamentalmente a que al incrementar el radio disminuye la contribución a la intensidad turbulenta de la

fuerza centrífuga, pero se incrementa la contribución correspondiente a mayores valores del número de *Reynolds*.

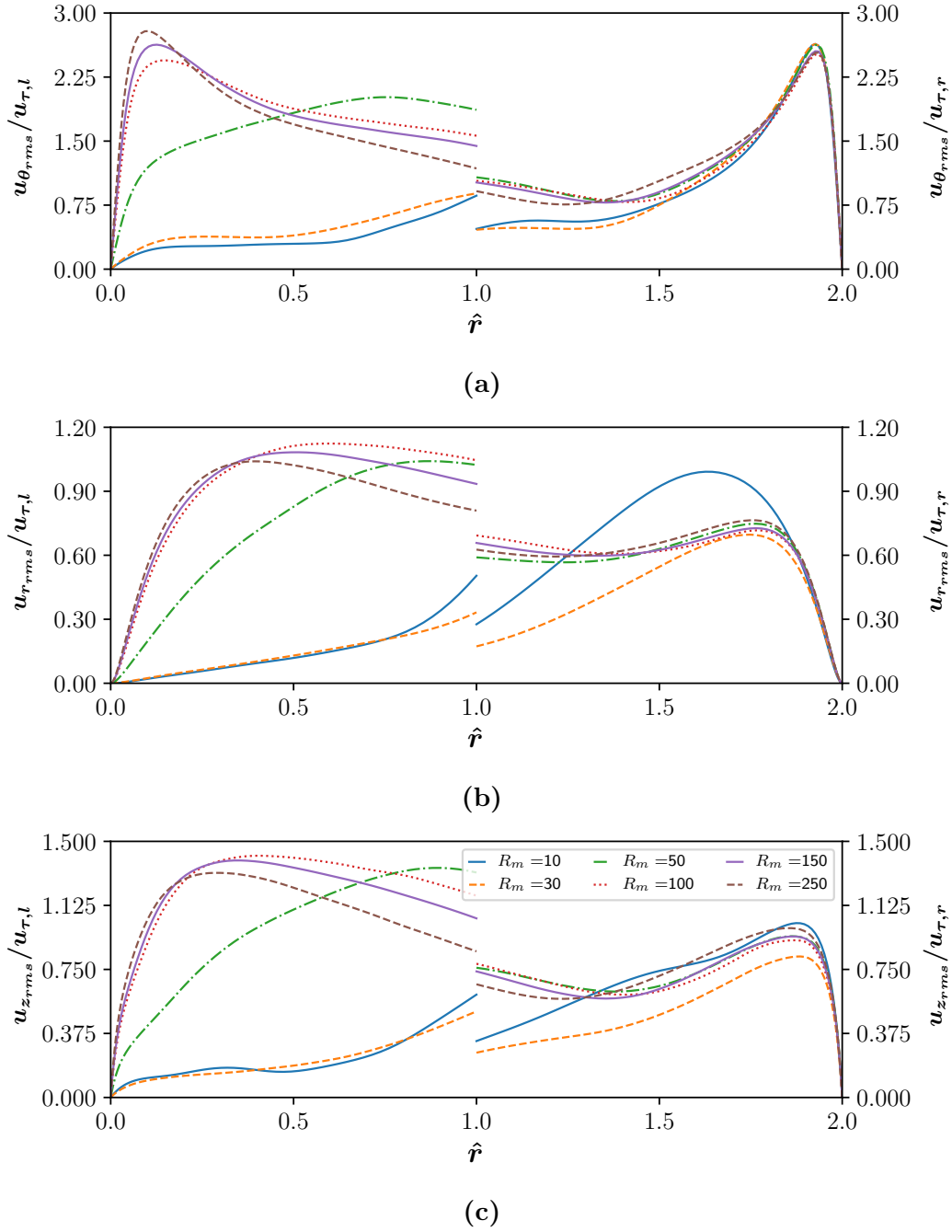


Figura 5.18: Valores rms normalizados con la velocidad de corte local media, calculada a la mitad de la altura de la pared ($z = 1$), en el radio interior (mitad izquierda) y en el radio exterior (mitad derecha), (a) $u_{\theta rms}$, (b) $u_{r rms}$, (c) $u_{z rms}$.

5.6.3. Esfuerzos de Reynolds

En la figura 5.19 se muestran los valores de la componente del tensor de *Reynolds* $-\overline{u'_r u'_\theta}$, normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, $u_{\tau,avg}^2$. Se

observa que para el caso $R_m = 10$, los valores cerca del radio exterior son negativos y de módulo máximo, mientras que en el lado izquierdo se encuentran regiones con valores levemente superiores a cero. El comportamiento del lado derecho se corresponde con la presencia de vórtices turbulentos en esta región, cerca de $z = 1$. Además, el signo negativo se debe a que las perturbaciones radiales en sentido negativo (hacia el interior de la sección) se encuentran asociadas a perturbaciones negativas en la dirección del flujo, por lo que $\overline{u'_r u'_\theta} > 0$ y el esfuerzo resulta negativo, como es de esperarse por la pendiente del perfil de velocidad $\overline{u_\theta}$ en la pared. Sobre el lado izquierdo los valores son considerablemente menores en magnitud, debido a que la velocidad radial, y también sus perturbaciones son menos importantes en esta región. Se ve que los valores ligeramente positivos se extienden a la derecha de $\hat{r} = 1$, debido a la asimetría del flujo.

Para el caso $R_m = 30$, al extenderse en forma vertical la región de aparición de vórtices (figura 5.14b), la zona de valores negativos sobre el radio exterior aumenta de tamaño, mientras que los valores extremos no varían significativamente. En el caso $R_m = 50$, como consecuencia de la aparición de una componente radial mayor sobre el centro del canal, aparece una nueva región de esfuerzos de *Reynolds* positiva en esta región. La zona cercana a la pared interior no es alcanzada por estos valores positivos elevados, debido principalmente a que la asimetría del flujo por efecto centrífugo sigue siendo significativa. Para los casos $R_m = 100$ a $R_m = 250$ se puede ver que esta región se desplaza hacia la izquierda.

Resulta importante notar también que para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, en los que el flujo secundario de primer tipo es más importante, existen regiones de esfuerzos de *Reynolds* no nulas cerca de las tapas del ducto. Estas regiones desaparecen para los casos $R_m = 50$ en adelante, aunque las perturbaciones de la componente radial se incrementen (como se ve en la figura 5.16).

En la figura 5.20 se muestran los valores de la componente $-\overline{u'_z u'_\theta}$. Para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$ esta magnitud resulta ser aproximadamente nula en gran parte de la sección, salvo en los vértices de la misma, en donde la velocidad vertical es importante. Se recuerda que para estos casos el flujo medio principal es relativamente uniforme en la dirección vertical (figura 5.3), y entonces aunque existan perturbaciones en el flujo vertical, las mismas no están asociadas a una perturbación preferencial de la componente angular de la velocidad. Cerca de los vértices, la combinación de velocidades verticales no nulas y los máximos de velocidad angular locales (comentados en la figura 5.3) derivan en regiones de esfuerzos de *Reynolds* no nulos. Se observa también una disminución de estos valores entre el caso 10 y el 30, debida principalmente a que disminuyen tanto las velocidades verticales como sus perturbaciones (figura 5.17).

A partir del caso $R_m = 50$ se observan dos regiones de esfuerzos no nulos sobre el radio

interior, a ambos lados de la mediatriz de la pared interna; estos esfuerzos resultan positivos en la mitad superior y negativos en la inferior. Al aumentar el radio medio, estas regiones se vuelven menos importantes en tamaño y magnitud, debido a la menor influencia del flujo secundario de segundo tipo, y aparecen regiones de esfuerzos no nulos sobre las paredes superior e inferior, de signos opuestos a los de las regiones antes nombradas, que aumentan de tamaño para radios mayores.

Si se analiza la figura 5.3a, se puede ver que para el caso $R_m = 50$ existe un cambio de concavidad del perfil, que genera un mínimo local en el centro de la sección, el cual es responsable de esta inversión de signos de los esfuerzos de *Reynolds* en esta zona, respecto a los encontrados cerca de las paredes. Se espera que para radios de curvatura arbitrariamente grandes, las regiones cercanas al radio interior desaparezcan y se observen únicamente las que se encuentran sobre las tapas, propias del desarrollo de un flujo medio simétrico.

Finalmente, en la figura 5.21 se muestra la última componente del tensor de *Reynolds*, $-\overline{u'_r u'_z}$. Estos resultados dependen enteramente de la interacción de las componentes de flujo secundario entre sí, por lo que esperable que existan valores no nulos en las regiones en donde la importancia relativa de ambas componentes sea semejante; esto ocurre en los vértices de la sección en los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, ya que son las regiones en donde el flujo secundario de primer tipo genera una recirculación, transformando movimiento vertical de parcelas de fluido en movimiento horizontal. Nuevamente existe una disminución de los valores en el caso $R_m = 30$ respecto al caso $R_m = 10$.

Se observa que para esta componente también aparece una región de valores no nulos sobre el radio interior en el caso $R_m = 50$, positiva sobre la mitad superior y negativa sobre la mitad inferior, al igual que para la componente $-\overline{u'_z u'_\theta}$, debido al incremento de la componente radial por el centro de la sección. Estas regiones disminuyen de tamaño al incrementar el radio, por la disminución de la intensidad del flujo secundario de primer tipo, llegando a ser regiones minoritarias en el caso $R_m = 250$.

A medida que el flujo secundario de segundo tipo se vuelve más importante, la interacción entre las perturbaciones radiales y verticales aparece en más regiones de la sección, debido a la existencia de más cantidad de celdas de recirculación pequeñas. En el caso $R_m = 250$ se observan cuatro regiones cualitativamente similares en los cuatro cuadrantes de la misma. Las regiones de la mitad izquierda son de mayor tamaño que las de la derecha, debido a que las celdas que existen sobre el radio interior son las de mayor tamaño e intensidad (figura 5.5). Para el caso de un ducto recto, sin asimetrías respecto a la bisectriz de las paredes horizontales, se espera ver una situación análoga en los cuatro cuadrantes.

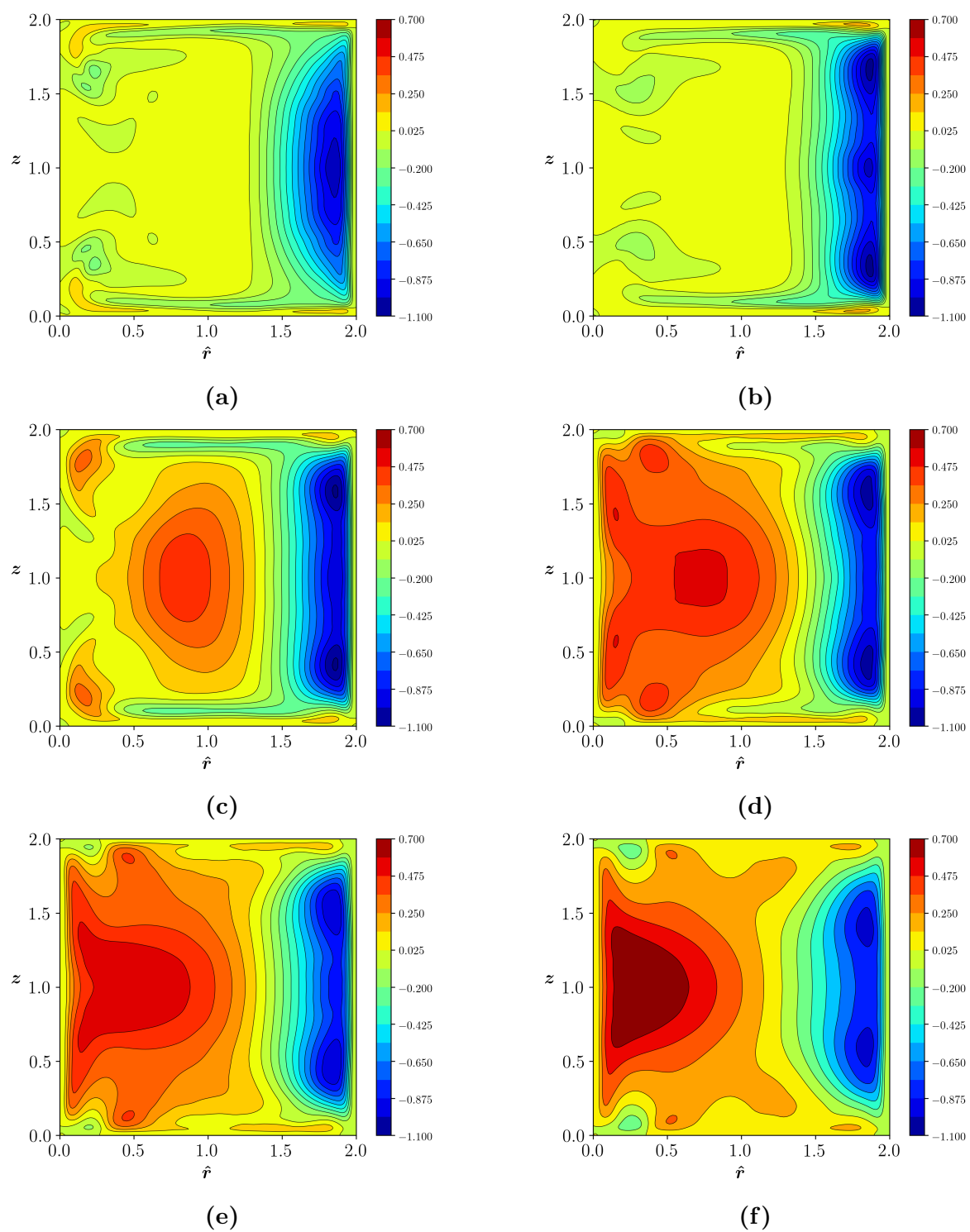


Figura 5.19: *Componente del tensor de Reynolds $\overline{u'_r u'_\theta}$, normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.*

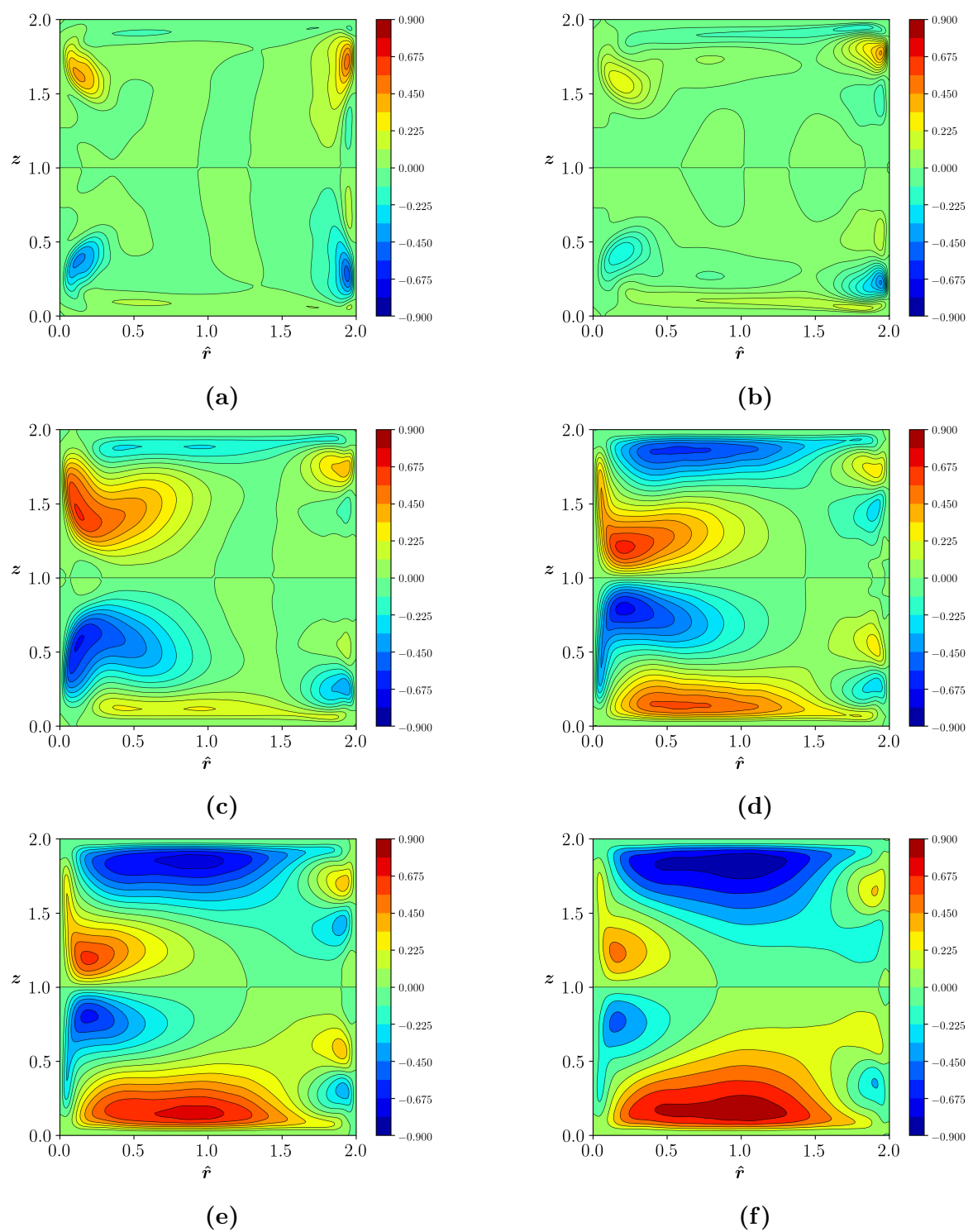


Figura 5.20: *Componente del tensor de Reynolds $\overline{u'_z u'_\theta}$, normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.*

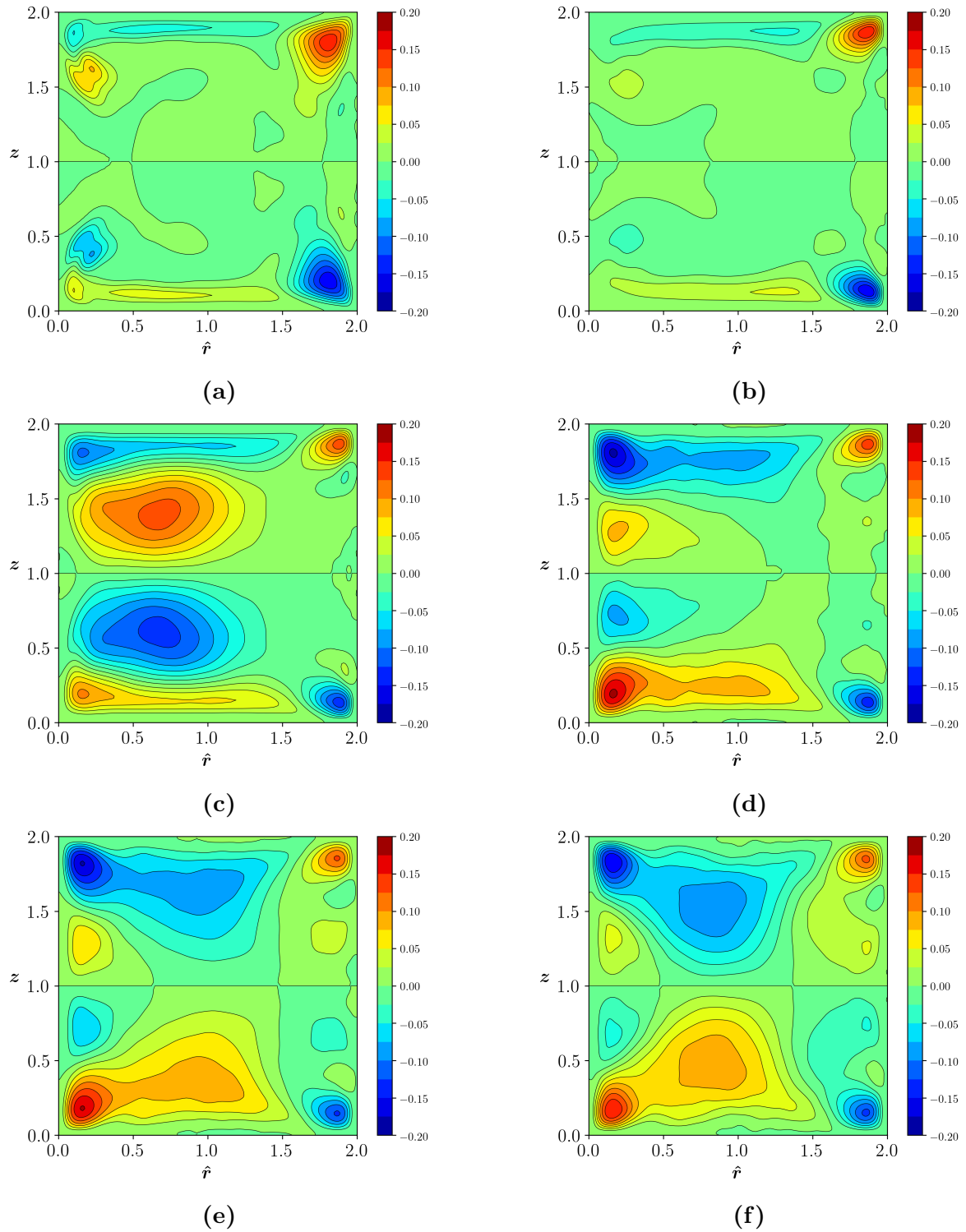


Figura 5.21: *Componente del tensor de Reynolds $\overline{u'_r u'_z}$, normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.*

Cabe aclarar que los valores extremos de la componente $-\overline{u'_r u'_z}$ resultan ser aproximadamente 5 veces menores en valor absoluto que los valores extremos de las otras componentes, como es de esperar según la importancia relativa del flujo secundario

respecto al primario.

5.6.4. Balance de energía cinética turbulenta

En la figura 5.22 se muestran los valores de energía cinética turbulenta $\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\overline{u_r'^2} + \overline{u_\theta'^2} + \overline{u_z'^2})$ para los distintos casos, adimensionalizados con la velocidad de corte promedio al cuadrado.

En primera instancia, para el caso $R_m = 10$ se puede ver que \mathcal{K} es aproximadamente nula, salvo en regiones cercanas a la pared exterior, en concordancia con lo observado en la figura 5.14. El valor máximo para el caso $R_m = 10$ resulta ser menor que el de los casos $R_m = 30$ en adelante, y este incremento se da acompañado de la aparición de una mayor cantidad de vórtices sobre el radio exterior para el caso $R_m = 30$.

Para los casos en los que $R_m > 30$, los valores máximos se encuentran siempre sobre el radio exterior, y no varían significativamente su valor a medida que se incrementa el radio medio. No obstante, se observa que a partir del caso $R_m = 50$ aparecen regiones con valores de \mathcal{K} no nulos sobre las otras paredes, debido a los incrementos de los valores *rms* sobre las mismas, explicados en la sección 5.6.2. Nuevamente se puede ver que para los casos en los que $R_m > 50$, la distribución sobre la pared interior abarca una mayor porción de la sección transversal, que la que ocupa sobre la pared exterior, en el sentido de que aparecen valores no nulos más hacia el interior de la sección sobre esta pared. Esto indica que el flujo secundario de primer tipo modifica el comportamiento de la turbulencia en esta región.

Debido a que los valores máximos no cambian significativamente entre los casos $R_m = 30$ a $R_m = 250$, y que la velocidad medida aumenta en este caso, se puede concluir que si se considera la intensidad total de la turbulencia, dividiendo los valores de la energía cinética turbulenta por u_b^2 , lo que se obtiene es una disminución de dicha intensidad al incrementar el radio medio. La disminución de los valores de \mathcal{K} máximos entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$ es de aproximadamente un 20 %, mientras que el incremento de u_b^2 resulta del 42 %, por lo que se deduce que la intensidad de la turbulencia disminuye al aumentar el radio medio, al mismo tiempo que la turbulencia penetra dentro de la sección alcanzando más regiones de esta.

Resulta interesante el hecho de que para radios medios bajos, la turbulencia parece estar completamente confinada a la región $1.8 < \hat{r} < 2$, cerca de $z = 1$, mientras que el resto del flujo no presenta perturbaciones significativas respecto a la media. Para verificar este comportamiento es importante observar los valores de producción y disipación turbulenta. Considerando un flujo completamente desarrollado en la dirección angular, estos valores resultan ser

$$\mathcal{P} = - \left[\overline{u_r'^2} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \overline{u_r' u_z'} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial z} + \overline{u_r' u_\theta'} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial r} + \overline{u_\theta' u_z'} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial z} + \overline{u_r' u_z'} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial r} + \overline{u_z'^2} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} \right], \quad (5.5)$$

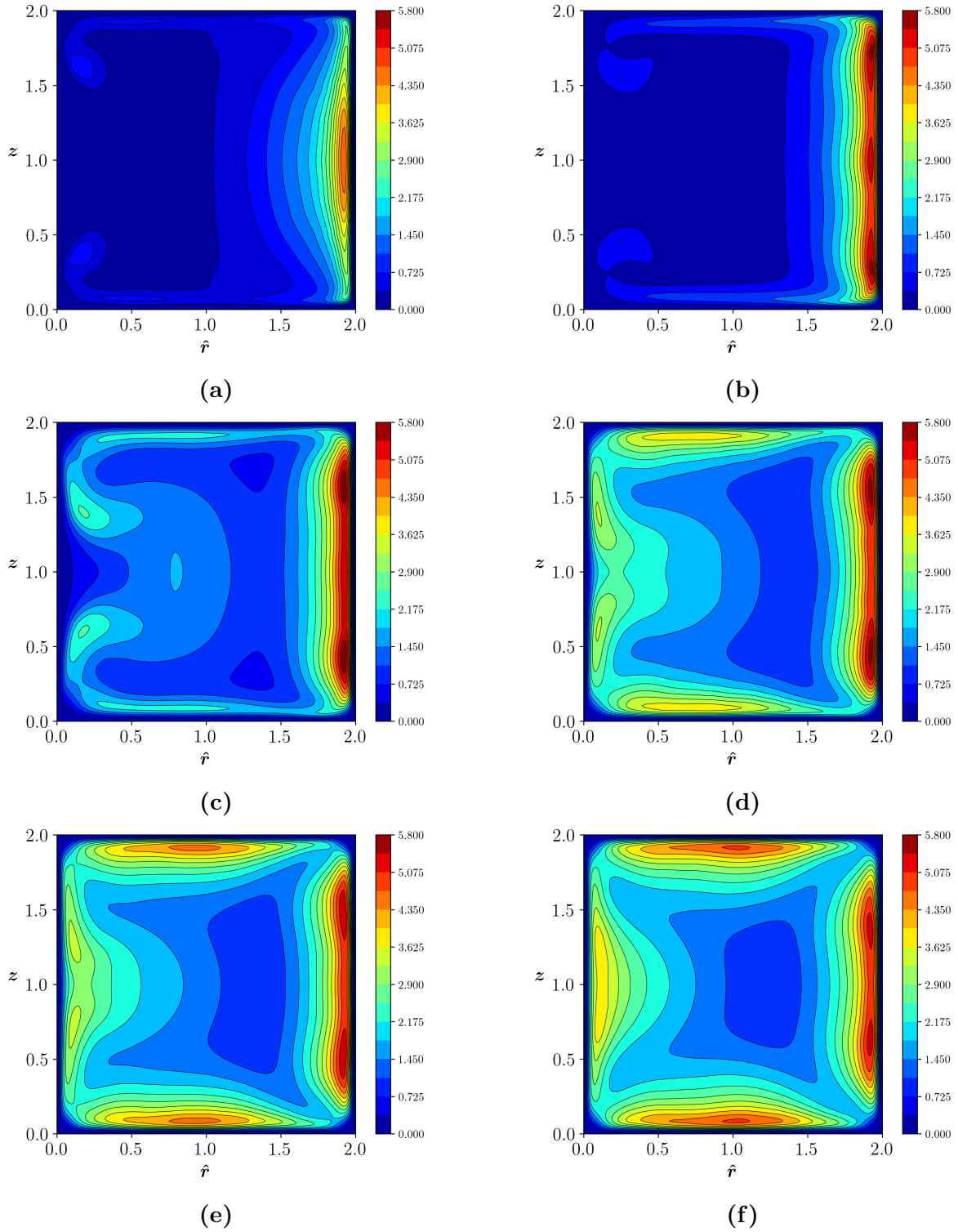


Figura 5.22: Valores de energía cinética turbulenta, \mathcal{K} , normalizados con el cuadrado de la velocidad de corte promedio, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

$$\epsilon = \frac{2}{Re_t} \left(\frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_r'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_r'^2} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_\theta'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_\theta'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_\theta'^2} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_z'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_z'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_z'^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \overline{u_r'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \overline{u_r'^2} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \overline{u_r'^2} \right). \quad (5.6)$$

En la figura 5.23 se muestran los valores de producción \mathcal{P} , adimensionalizados con $u_{\tau,avg}^3$. La producción esta asociada directamente a la interacción de los gradientes del flujo medio con las componentes del tensor de *Reynolds*, es por ello que la existencia de valores nulos de producción puede darse porque los gradientes de velocidad son nulos (por ejemplo en el valor máximo) o bien en las regiones en donde los esfuerzos de *Reynolds* no son importantes.

Se observa que para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$ la producción se encuentra confinada a la región adyacente a la pared exterior. Esto se debe a que si bien los gradientes de velocidad son importantes en todas las paredes, en particular los correspondientes al flujo secundario, los valores de los esfuerzos turbulentos son únicamente importantes en esta región. Puede verse también que los valores máximos de producción aumentan entre el caso $R_m = 10$ y el $R_m = 30$, debido mayoritariamente al cambio de configuración de la componente $-\overline{u_r' u_\theta'}$ que puede verse en la figura 5.19. A partir del caso $R_m = 50$ los valores máximos sobre la pared exterior disminuyen moderadamente.

Entre los casos $R_m = 50$ y $R_m = 100$ se observa un incremento de \mathcal{P} sobre las paredes interior, superior e inferior. Los gradientes de velocidad principal sobre las paredes horizontales no se modifican significativamente al incrementar el radio medio (figura 5.3), y los gradientes de la velocidad radial disminuyen, ya que el flujo secundario de primer tipo se vuelve menos importante. Se concluye que este incremento en la producción se encuentra dominado por el incremento de las componentes $-\overline{u_z' u_\theta'}$ y $-\overline{u_r'^2}$, que alcanzan un máximo en el caso $R_m = 250$ (figuras 5.16 y 5.20), y es por ello que la producción en estas paredes aumenta monótonamente entre los casos $R_m = 50$ y $R_m = 250$.

Respecto a la pared izquierda, se observa un incremento de la producción a partir del caso $R_m = 100$, producto de que el perfil de velocidad se vuelve más simétrico, y al incremento de la componente $-\overline{u_r' u_\theta'}$ en esta región.

Existen también regiones de producción negativa en los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$. Estas regiones aparecen como producto de la fuerte asimetría del flujo en la dirección radial (figura 5.1), que implica que la tasa de transferencia de momento lineal a ambos lados del máximo no resulta equivalente, y entonces los esfuerzos de *Reynolds* no son simétricos respecto del máximo, sino que la zona de esfuerzos nulos se encuentra desplazada hacia la derecha del máximo de velocidad, en este caso. Los valores de producción

negativa resultan minoritarios en todos los casos, respecto a los valores positivos, y pueden interpretarse como regiones en las que la turbulencia alimenta a la energía del flujo medio. No se observan estas regiones para los casos con $R_m > 50$.

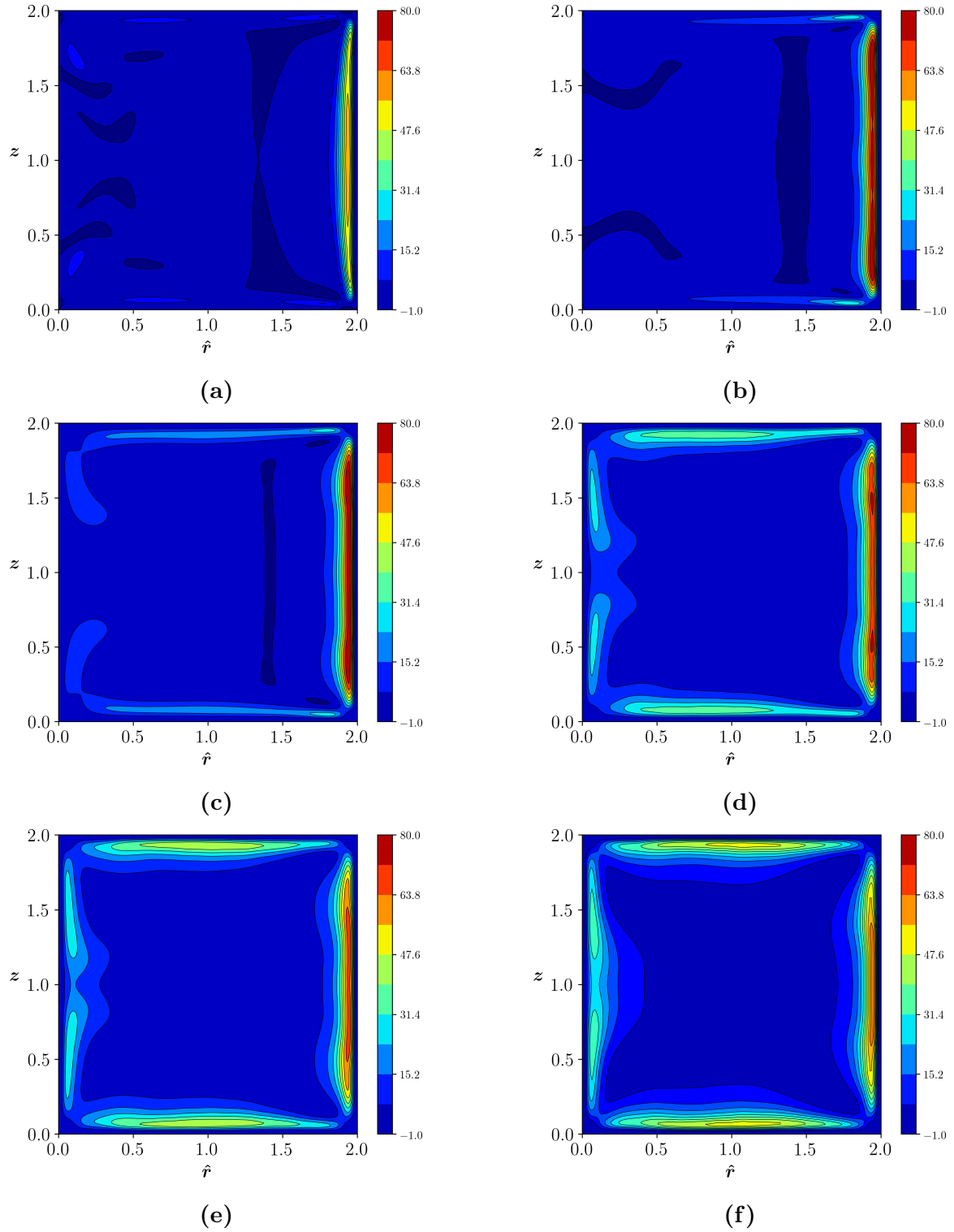


Figura 5.23: Producción de energía cinética turbulenta, \mathcal{P} , normalizada con $u_{\tau,avg}^3$, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.

En la figura 5.24 se muestran los valores de disipación de energía cinética turbulenta, ϵ , también adimensionalizados con $u_{r,avg}^3$. El análisis de esta magnitud resulta semejante al realizado para la producción de energía cinética. Para el caso $R_m = 10$ existen valores de disipación elevados sobre el radio exterior, y existe un incremento de estos valores entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 50$. Al aumentar el radio medio a partir del caso $R_m = 50$, aparecen regiones de disipación elevada sobre las paredes restantes del ducto, existiendo siempre una región de disipación nula en el centro del ducto.

Al comparar los contornos de producción y disipación, se puede ver que estos últimos resultan mayores en tamaño que los de producción, para valores iguales de las dos magnitudes. Este efecto se debe a los términos de transporte de la ecuación de conservación de \mathcal{K} . La producción se da en regiones más localizadas del ducto, generando estructuras turbulentas que son transportadas por diversos mecanismos, y finalmente son disipadas en las escalas más pequeñas, a cierta distancia de donde fueron producidas.

El hecho de que los contornos de producción y disipación sean análogos da la idea de que los términos de transporte tienen efectos de corto alcance sobre \mathcal{K} . Esto implica que para los casos en los que el flujo secundario es más intenso, es decir los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, no existe un transporte neto de energía cinética turbulenta hacia el radio interior del ducto. Únicamente cuando el flujo secundario disminuye en magnitud y las celdas incrementan su tamaño, se comienza a observar una producción, y por ende una disipación neta sobre las otras paredes. Este fenómeno implica que el efecto combinado del flujo secundario de primer tipo, y de la fuerza centrífuga por la curvatura del ducto, actúa como un agente estabilizador del flujo, inhibiendo el desarrollo de la turbulencia, en particular sobre el radio interior y en las regiones adyacentes a $z = 1$.

No obstante, la asimetría de los contornos para el caso $R_m = 250$ respecto a la mediatriz de las paredes horizontales indica que el flujo secundario modifica de alguna forma a la turbulencia sobre la pared interior, en particular a partir del caso $R_m = 50$, en el que las celdas de recirculación aumentan su tamaño sobre dicha pared.

En la figura 5.25 se muestran los valores de \mathcal{K} , \mathcal{P} y ϵ , utilizando como escalas de normalización las velocidades de corte local en las paredes laterales. Respecto a los valores de energía cinética turbulenta, en la pared derecha se observa una disminución local entre el caso $R_m = 10$ y el $R_m = 30$; luego los valores máximos se mantienen aproximadamente uniformes. Si se observa la figura 5.22 puede verse que de forma global, los valores de \mathcal{K} son más bajos en el caso $R_m = 10$ que en los restantes sobre esta pared. Al usar la velocidad de corte local (que aumenta entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, y luego disminuye monótonamente, como se detalla en la tabla 5.1), se ve que localmente la energía cinética es máxima para el radio medio menor. El valor mínimo en la velocidad de corte sobre esta pared para el caso $R_m = 10$ se debe a la presencia de los vórtices adicionales.

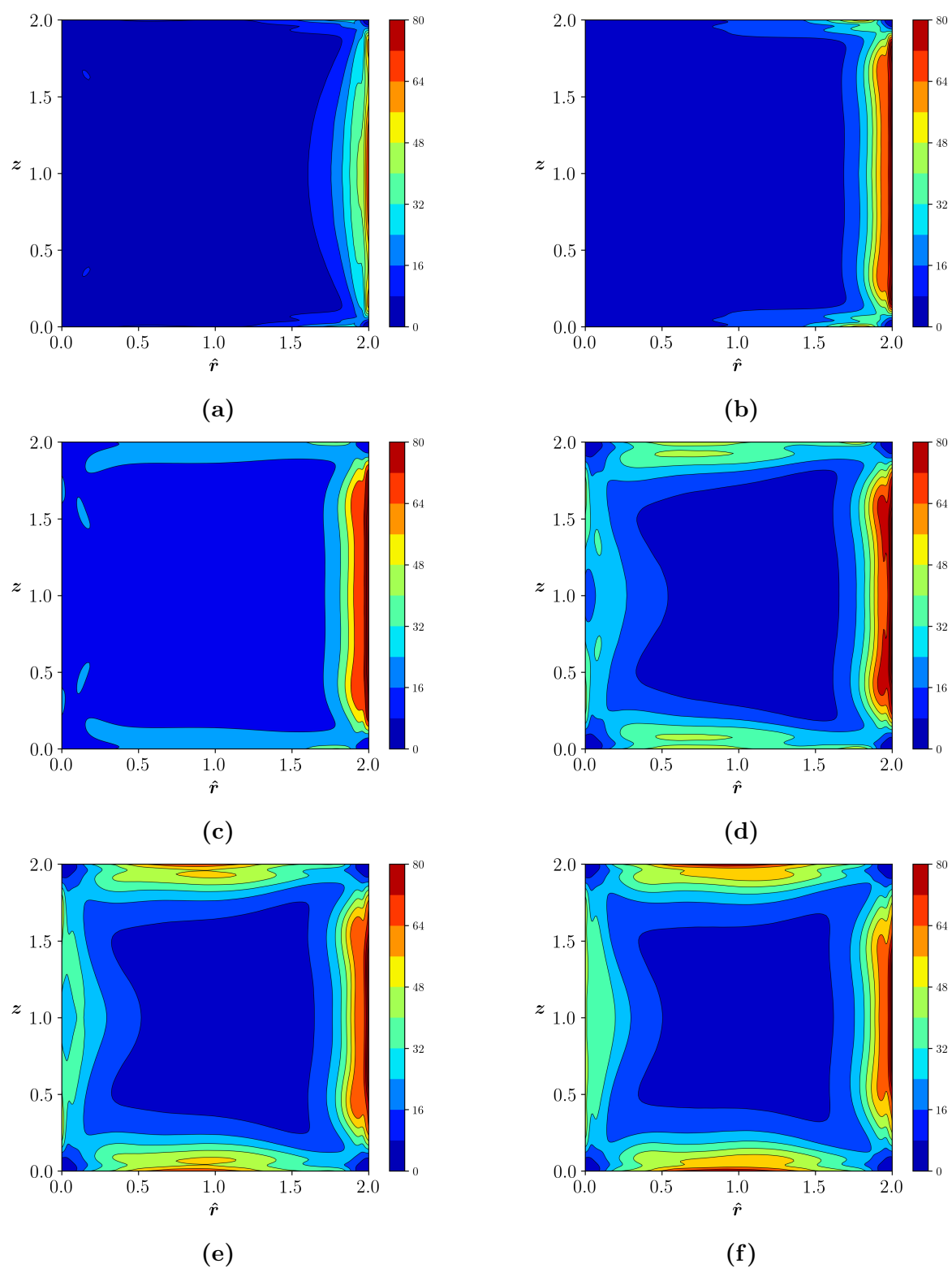


Figura 5.24: *Disipación viscosa de energía cinética turbulenta, normalizada con $u_{\tau,avg}^3$, (a) $R_m = 10$, (b) $R_m = 30$, (c) $R_m = 50$, (d) $R_m = 100$, (e) $R_m = 150$, (f) $R_m = 250$.*

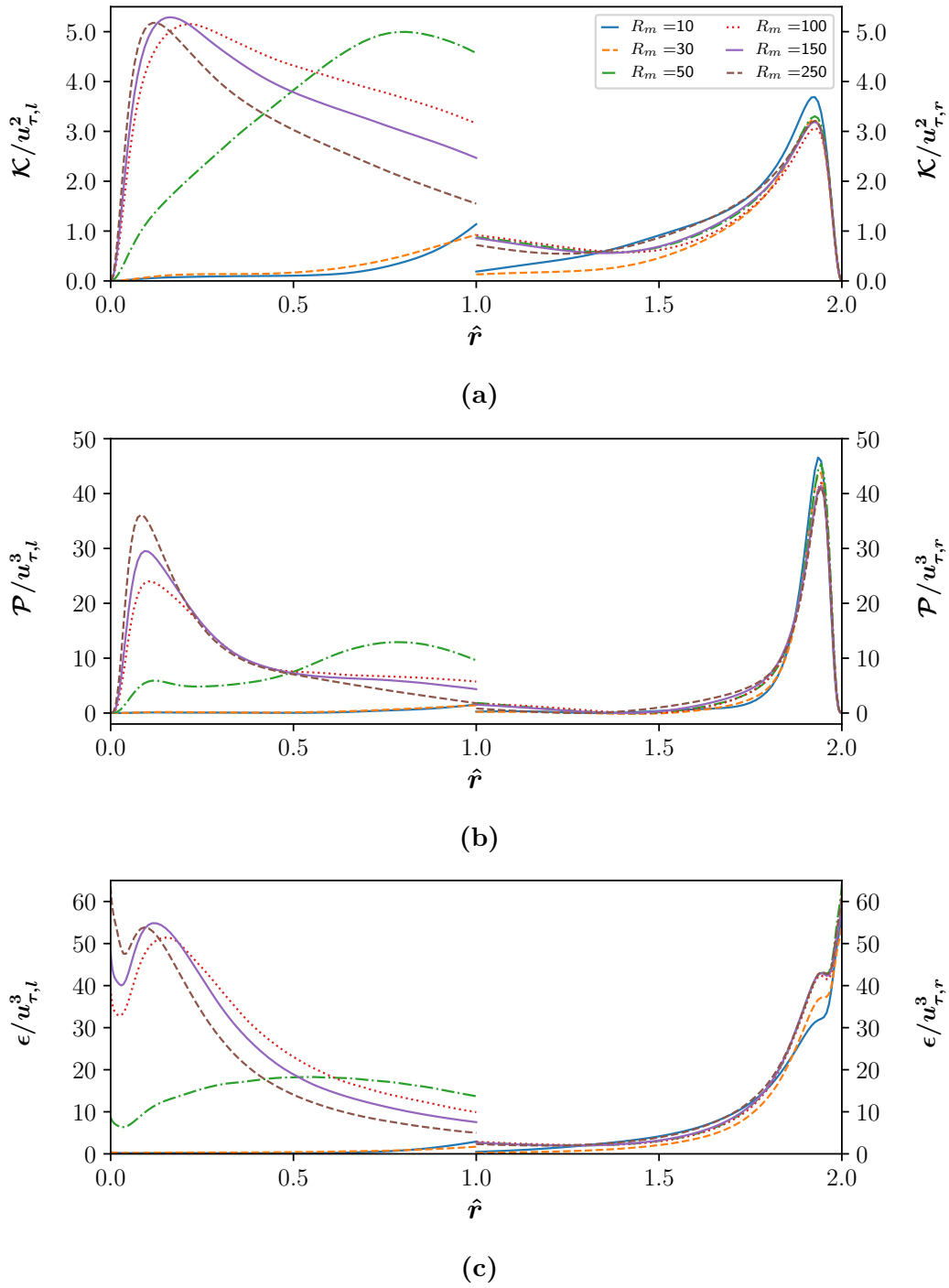


Figura 5.25: Valores de \mathcal{K} (a), \mathcal{P} (b) y ϵ (c) normalizados con la velocidad de corte local en el radio interior (mitad izquierda) y en el radio exterior (mitad derecha).

En la pared izquierda, los valores de \mathcal{K} son aproximadamente nulos para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$, luego existe una marcada transición de comportamiento en el caso $R_m = 50$, en el cual aparece un máximo lejos de la pared y cerca del centro de la sección, indicando la aparición de turbulencia sobre el radio interior. Este máximo se traslada hacia la pared a medida que se aumenta el radio medio, mientras que el su valor no se modifica significativamente.

Se puede ver que \mathcal{P} disminuye sobre la pared derecha a medida que se incrementa el radio y aumenta sobre la pared izquierda. Sin embargo el segundo efecto resulta más importante que el primero, teniendo en cuenta que para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$ la producción sobre la pared interior es esencialmente nula. Nuevamente se verifica que de forma local la producción sobre el radio exterior disminuye al aumentar el radio medio.

Respecto a la disipación ϵ , sobre la pared derecha los valores se incrementan entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 50$, y luego se mantienen aproximadamente constantes. En la pared izquierda se observa la misma tendencia pero con variaciones más importantes; la disipación es nula para los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$. Para el caso $R_m = 50$ aumenta significativamente, y luego entre los casos $R_m = 100$ y $R_m = 250$ los valores sobre la pared, así como también el mínimo local próximo a esta, se incrementan.

5.7. Flujo en ductos de bajo radio

La presencia de dos vórtices adicionales en el caso $R_m = 10$ sobre el radio exterior, de importancia relativa minoritaria frente a las celdas de recirculación del flujo secundario de primer tipo, plantea la posibilidad de una configuración de flujo secundario distinta a las ya analizadas. En esta sección se muestran resultados análogos a los presentados anteriormente, para un caso simulado con un valor de $R_m = 5$; el mismo representa un radio de curvatura bajo, o una fuerte curvatura del ducto.

Para este caso, se espera que el efecto de la fuerza centrífuga así como la intensidad del flujo secundario de primer tipo resulten mayores que en todos los casos analizados anteriormente. En la figura 5.26 se muestran los contornos de las distintas componentes del campo de velocidades normalizadas con la velocidad media, la magnitud y los vectores de flujo secundario.

Tal como se observa en la figura 5.4a en la que se muestra el flujo medio para el caso $R_m = 10$, existe para el caso $R_m = 5$ un par de vórtices contrarrotantes adicionales, que aparecen sobre el radio exterior. Estos resultan ser de mayor intensidad para este caso, y generan una componente de velocidad radial neta en sentido negativo sobre $z = 1$, de aproximadamente un 10 % de la velocidad media. Estos vórtices modifican el flujo medio sobre el radio exterior, debido a la transferencia de momento lineal hacia el centro de la sección, desplazando localmente el máximo de velocidad a la derecha. Además, como es de esperar, los valores de flujo secundario máximo resultan mayores que los observados en los casos con $R_m \geq 10$.

En la tabla 5.4 se indican los valores globales del flujo para este caso, con el objetivo de compararlos con los valores de la tabla 5.1.

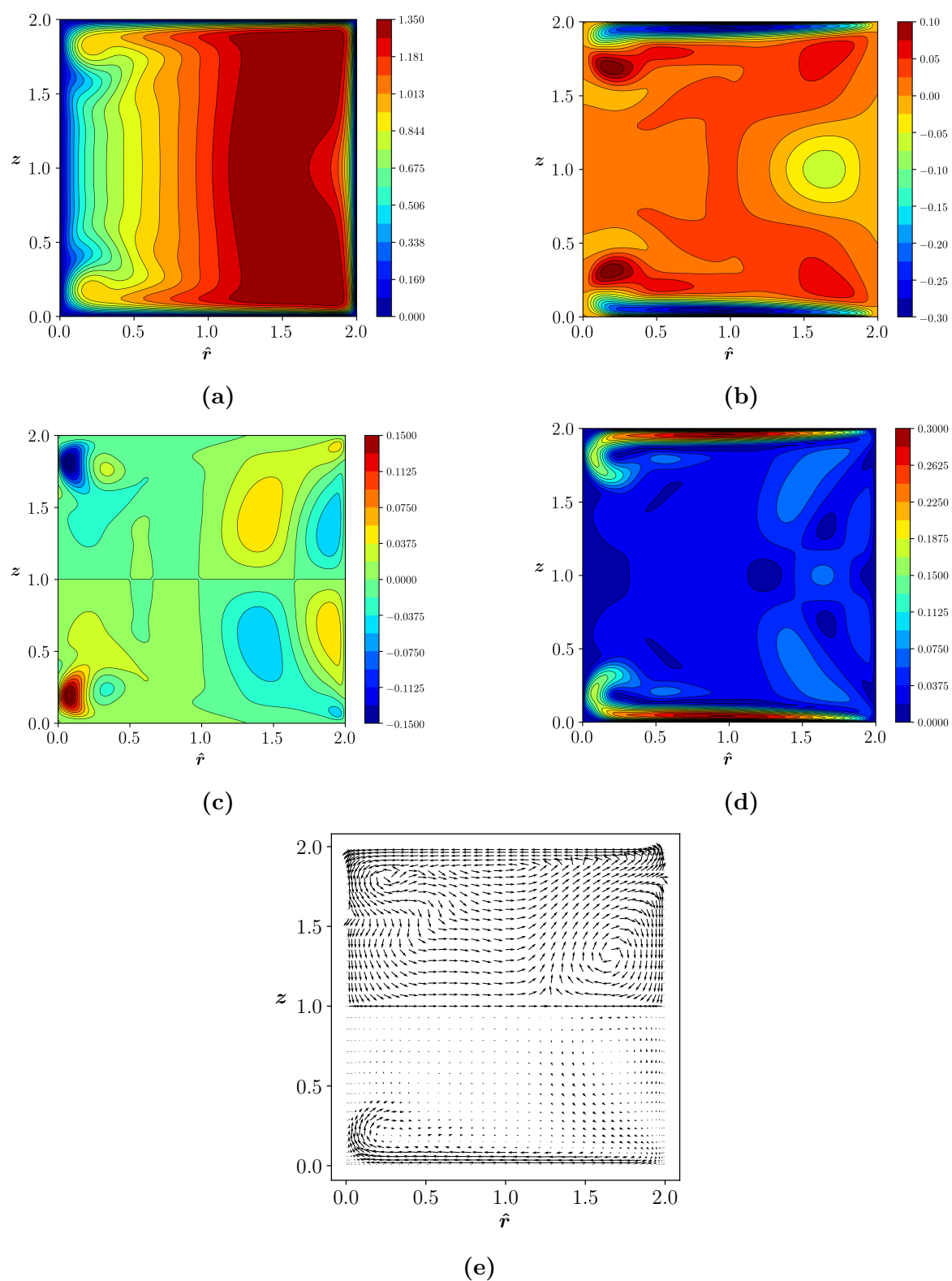


Figura 5.26: Resultados del flujo medio para el caso $R_m = 5$. (a) \bar{u}_θ , (b) \bar{u}_r , (c) \bar{u}_z , (d) $\sqrt{\bar{u}_r^2 + \bar{u}_z^2}$ (valores normalizados con u_b), (e) Vectores de flujo secundario, de módulo unitario en la mitad superior, y normalizados con el valor máximo en la mitad inferior.

Magnitud	Valor
R_m	5
u_b	10.03
Re_b	1805
De	807
$u_{\theta_{m\acute{a}x}}$	13.60
$u_{\tau,l}$	0.569
$u_{\tau,r}$	0.975

Tabla 5.4: *Propiedades globales del flujo para el caso 5.*

Puede verse que la tendencia de la mayoría de las cantidades es la misma que la mostrada en la tabla 5.1, es decir, el número de *Reynolds*, la velocidad media y la velocidad máxima resultan menores que en el caso $R_m = 10$, debido a una mayor intensidad del flujo secundario, y el número de *Dean* resulta mayor, como consecuencia de un menor radio medio. La velocidad de corte local en la pared izquierda es menor que en el caso $R_m = 10$, y en la tabla 5.1 se observa que este valor crece monótonamente al incrementar el radio medio. Sin embargo, el valor de la velocidad de corte en la pared derecha presenta un máximo para el caso $R_m = 50$; este valor se incrementa entre los casos $R_m = 5$ y $R_m = 50$, y luego disminuye monótonamente hasta el caso $R_m = 250$. La presencia de valores bajos de esta cantidad parece estar ligada a la existencia del par de vórtices adicionales, que provocan que el flujo se comporte como si el forzado fuera localmente menor en la región de la pared derecha en la que tienen influencia.

En la figura 5.27 se muestran los valores de la energía cinética turbulenta, \mathcal{K} , y de la producción, \mathcal{P} para el caso $R_m = 5$. Los valores de disipación no se muestran, ya que resultan cualitativamente similares a los contornos de producción. Estas cantidades se encuentran normalizadas con $u_{\tau,avg}^2$ y $u_{\tau,avg}^3$ respectivamente. En ambos casos puede verse que los valores máximos son menores que los correspondientes para el caso $R_m = 10$, por lo que se concluye que el incremento en la energía cinética turbulenta entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$ se corresponde con la desaparición de este par de vórtices.

Se observa que los valores de \mathcal{K} no nulos se encuentran únicamente cerca del radio exterior, y sobre la mitad de la altura de la sección. Estos valores decaen desde un máximo en $z = 1$ rápidamente hacia las paredes, en donde la energía cinética turbulenta resulta ser aproximadamente nula. La producción se encuentra nuevamente relegada a la misma región de la sección, pero disminuye más rápido para valores alejados de la pared exterior. Cabe aclarar que si bien los valores son menores que en el caso $R_m = 10$ de forma global, al ser la velocidad de corte local $u_{\tau,r}$ menor que en el caso $R_m = 10$, es esperable que, utilizando esta escala de velocidad, se observe un incremento local de

\mathcal{K} y \mathcal{P} sobre la pared derecha, tal como se observa entre los casos $R_m = 10$ y $R_m = 30$.

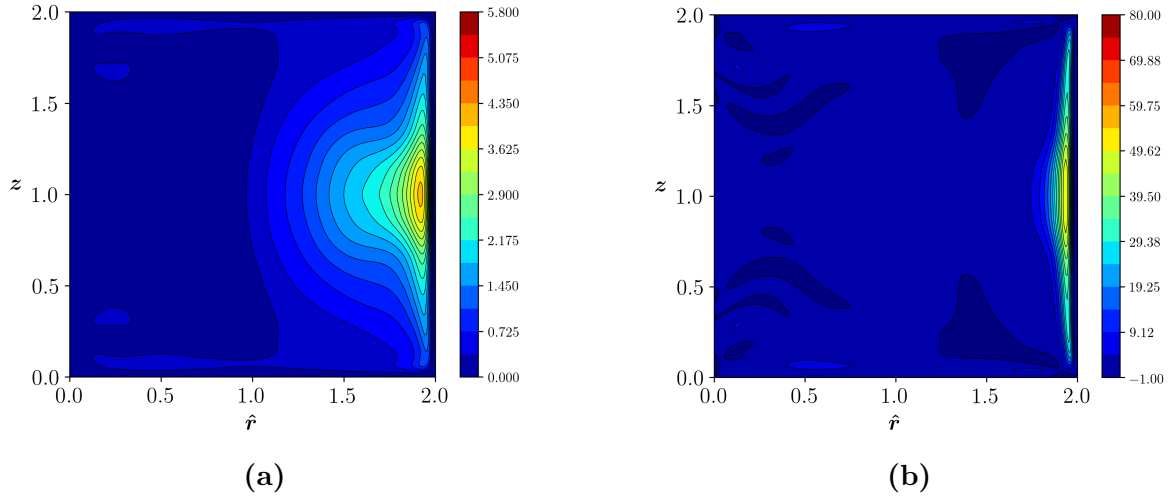


Figura 5.27: Contornos de \mathcal{K} (a) y \mathcal{P} (b) para el caso $R_m = 5$, utilizando como escala la velocidad de corte promedio.

Es importante resaltar que estos vórtices no resultan ser de primer ni de segundo tipo, debido a que no pueden explicarse con las teorías que dan lugar a la aparición de estos flujos secundarios. Por el contrario, se cree que la aparición de estos vórtices adicionales es consecuencia de una inestabilidad centrífuga en el flujo [10]. Para valores suficientemente bajos del radio medio, el gradiente de presión en la dirección radial es importante, y existe un balance directo entre esta cantidad y la aceleración centrífuga en el centro de la sección. Si ocurre que el gradiente de presión se vuelve mayor a la aceleración centrífuga en regiones alejadas de las paredes, en donde los otros términos de la ecuación de momento resultan poco importantes, puede aparecer una fuerza neta sobre las parcelas de fluido en la dirección negativa, que origine una recirculación hacia el radio interior, dando lugar a la aparición de estos vórtices. En la siguiente sección se estudia en detalle el balance de momento lineal en la dirección radial.

5.8. Balance de momento en la dirección radial

En la figura 5.28 se muestran los principales términos de la ecuación de promediada de momento lineal en la dirección radial. Por simplicidad en la visualización, no se consideran los términos que resultan aproximadamente nulos, por lo tanto en la figura se muestran los términos de la ecuación aproximada

$$\overline{u_r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} - \frac{\overline{u_\theta^2}}{r} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r'^2} \approx 0. \quad (5.7)$$

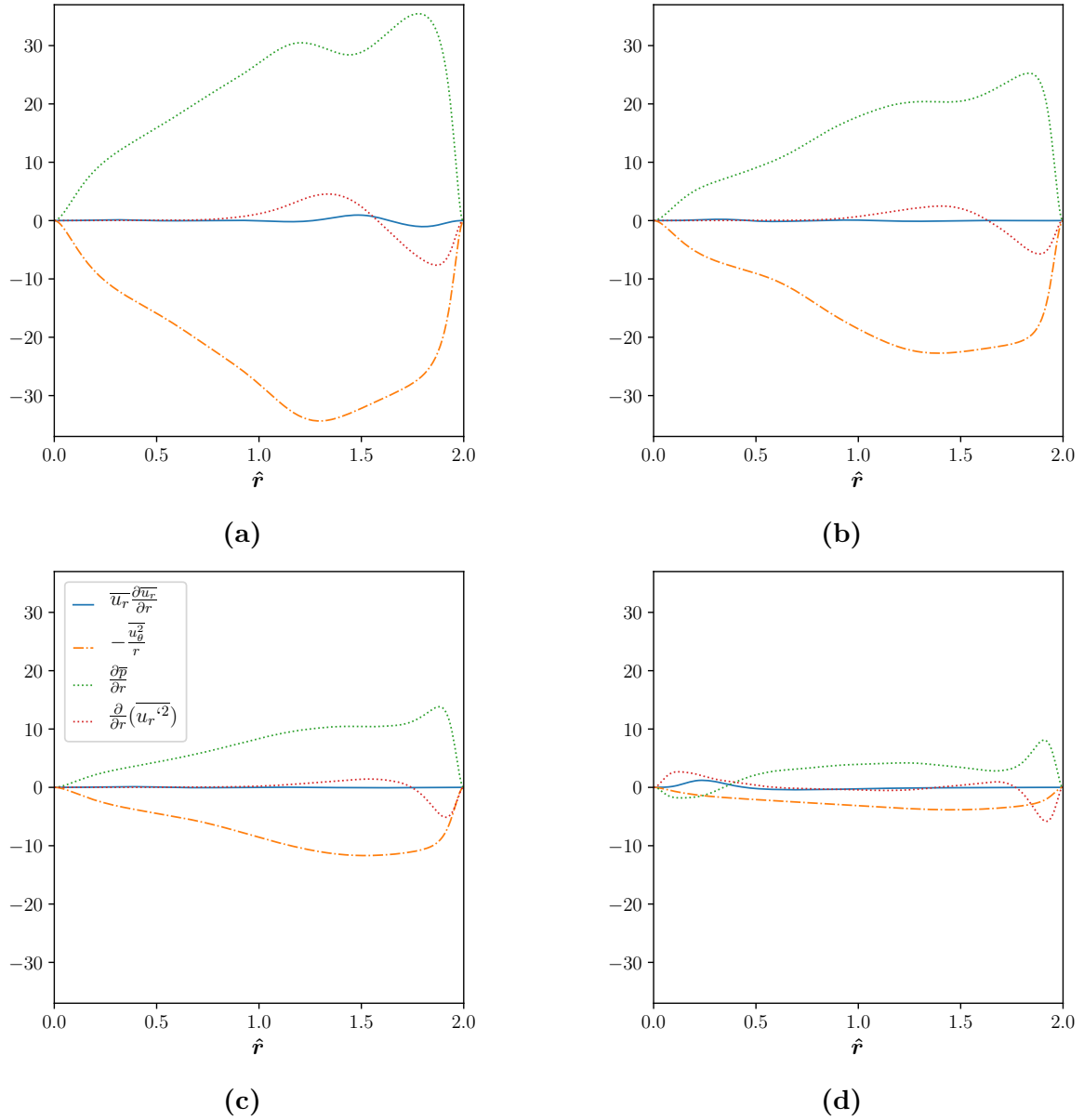


Figura 5.28: Principales términos de la ecuación promediada de momento lineal en la dirección radial, (a) $R_m = 5$, (b) $R_m = 10$, (c) $R_m = 30$, (d) $R_m = 100$.

Se muestran únicamente los casos $R_m = 5$, $R_m = 10$ y $R_m = 30$ para analizar el balance de términos sobre el radio derecho. Además se muestra el caso $R_m = 100$ con fines ilustrativos, ya que los casos $R_m = 150$ y $R_m = 250$ son semejantes a este último. Se observa en la figura que para los primeros tres casos, el gradiente de presión y la aceleración centrífuga resultan más importantes que los otros términos. Además, estos disminuyen conforme se incrementa el radio medio. Se puede ver también que el término de la derivada material en la dirección radial es no nulo en la pared exterior únicamente en el caso $R_m = 10$, y en la pared interior únicamente en el caso $R_m = 100$. Esto se debe a que primero desaparecen los vórtices por inestabilidad centrífuga, generando una región de velocidad radial aproximadamente nula. Luego cuando las celdas de

recirculación se incrementan, aumenta la velocidad radial sobre el radio interior.

La aparición del par de vórtices adicionales se da cuando el gradiente de presión resulta mayor a la aceleración centrífuga. En la figura 5.29 se muestra la diferencia entre estos dos términos.

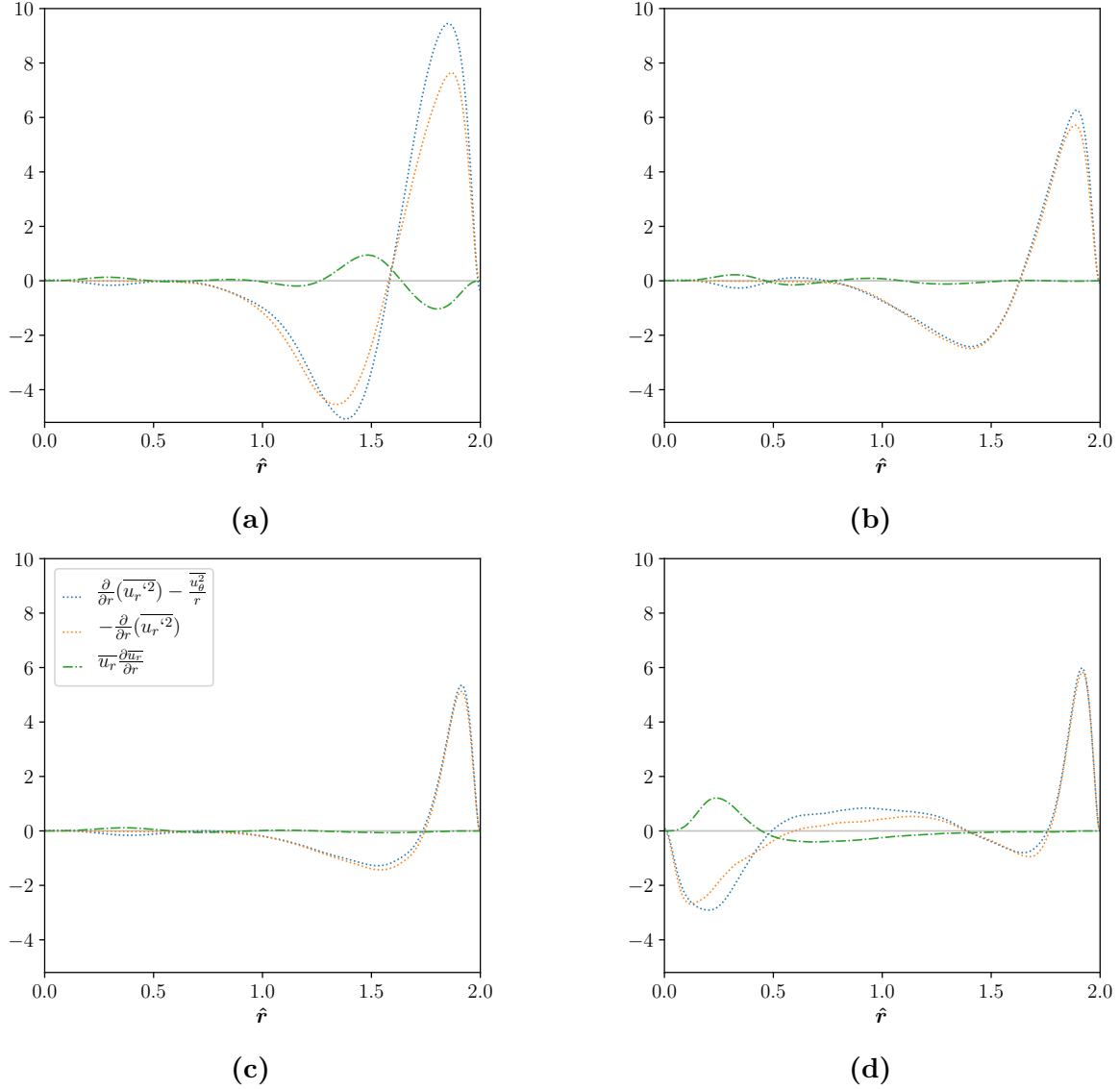


Figura 5.29: Diferencia entre los términos de gradiente de presión y aceleración centrífuga, se muestran también los otros términos no nulos, (a) Caso 5, (b) Caso 10, (c) Caso 30, (d) Caso 100.

Se observa que la diferencia $\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{\overline{u_\theta^2}}{r}\right)$ resulta positiva en todos los casos sobre la pared exterior. Para los casos 10 en adelante esta diferencia se encuentra balanceada por el término derivado del tensor de Reynolds, $\overline{u_r'^2}$. Sin embargo, el comportamiento en el caso $R_m = 5$ es distinto, puesto que esta diferencia no alcanza a ser compensada completamente por el término del tensor de Reynolds, y entonces el balance se completa con la aparición del término de derivada material, que está asociado a la recirculación

hacia el centro de la sección, impuesta por la aparición del par de vórtices adicionales. Resulta interesante comentar también que para el caso $R_m = 100$, debido a que el flujo se vuelve menos asimétrico, aparece una diferencia neta entre los términos de gradiente de presión y aceleración centrífuga sobre el radio interior, de signo opuesto al que existe en el radio exterior. Se puede ver que la aparición de este fenómeno induce la presencia tanto de un término de derivada material, como de uno derivado del esfuerzo de *Reynolds*, en correspondencia con el incremento de las intensidades turbulentas y del flujo secundario para este caso.

5.9. Propiedades globales del flujo

Como aporte final de este trabajo se muestran dos resultados que condensan propiedades globales del flujo en un ducto curvo sometido a un forzado homogéneo. Estos resultados pueden resultar de interés práctico para el dimensionamiento hidráulico en distintas aplicaciones de ingeniería en las que sea necesario utilizar ductos curvos adecuadamente caracterizados, como puede ser el caso de intercambiadores de calor helicoidales.

Se ha comentado a lo largo del capítulo acerca de la estructura del flujo secundario, de la interacción de este con el flujo medio, y de las modificaciones que el mismo establece sobre el desarrollo de la turbulencia, a medida que se consideran radios medios mayores. Estos fenómenos, que resultan de interés académico para comprender en mayor profundidad el fenómeno físico, no son completamente adecuados en etapas de ingeniería. Es por ello que se muestran a continuación dos cantidades de interés práctico, la primera de ellas es el factor de fricción de *Darcy*, el cual es una cantidad importante para el cálculo de la pérdida de carga en un ducto, y se calcula como

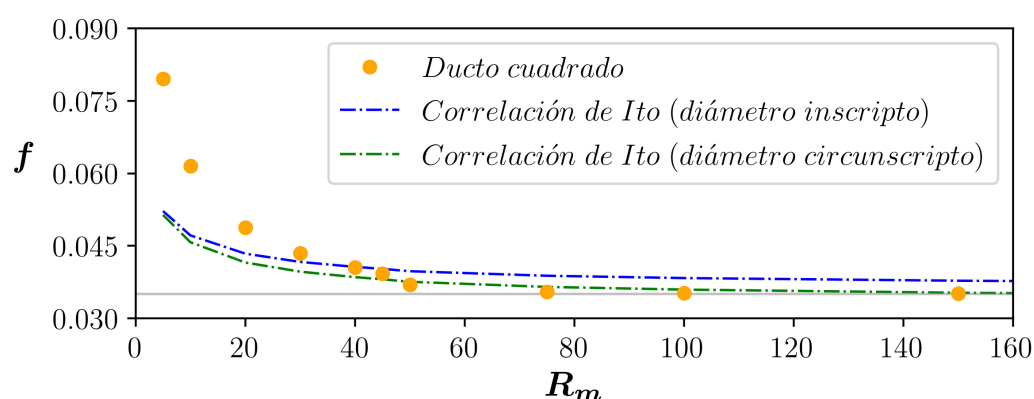
$$f = 8 \frac{u_{\tau,avg}^2}{u_b^2}. \quad (5.8)$$

Por otro lado, resulta importante caracterizar el mezclado turbulento que ocurre en el ducto, ya que como se vió a lo largo del trabajo, existen distintos regímenes según sea el radio de curvatura y el número de *Reynolds* basado en la velocidad media. Una forma de cuantificar este mezclado es calcular el promedio de la intensidad turbulenta total sobre la sección cuadrada, de la siguiente forma

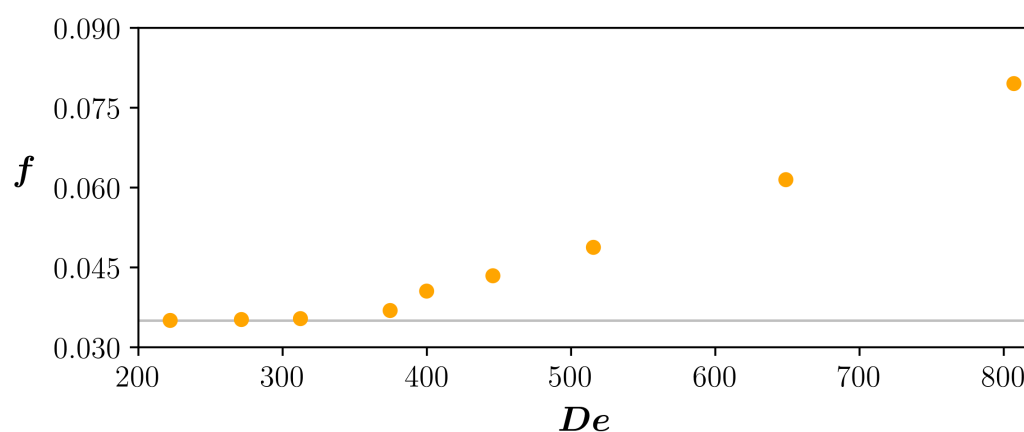
$$\frac{\bar{K}}{u_b^2} = \frac{1}{u_b^2} \frac{1}{A} \int_A K(\hat{r}, z) dA. \quad (5.9)$$

En la figura 5.30 se muestra el factor de fricción, en función tanto del radio medio de curvatura como del número de *Dean*. Cabe aclarar que la curva presenta más puntos que

los correspondientes a los 7 casos analizados; estos casos restantes no se presentan en el trabajo por presentar fenómenos análogos a alguno de los casos estudiados. Se muestra también el factor de fricción que predice la correlación de *Ito* [25] para ductos curvos de sección circular, considerando un diámetro igual al lado de la sección cuadrada (equivalente a un diámetro inscripto en la sección), y también un diámetro de lado igual a la diagonal de la sección (diámetro circunscripto). Puede verse que la correlación no representa bien los valores numéricos, y por lo tanto no resulta correcto extrapolar las conclusiones que puedan obtenerse de esta para el caso de un ducto de sección cuadrada, o viceversa.



(a)



(b)

Figura 5.30: Factor de fricción de Darcy en función del radio medio (a) y del número de Dean. Se muestran también los factores predichos por la correlación de *Ito* [25] para ductos circulares.

Se puede ver que el factor de fricción disminuye al aumentar el radio de curvatura, y que a partir de $R_m = 75$ el valor es aproximadamente el correspondiente a un ducto recto sometido al mismo forzado, $f = 0.035$. El número de Dean resulta una variable independiente adecuada porque, debido a que en este trabajo se impone el valor de Re_τ , para cada radio de curvatura, el valor de Re_b está fijo; no se espera entonces que

para otros valores de Re_b se obtengan los factores de fricción de la figura 5.30. Por el contrario, los resultados expresados en función de De servirían para comparar los valores con otros estudios que utilicen otra combinación de parámetros que derive en un mismo valor del este número adimensional.

En la figura 5.31 se muestran los valores del mezclado turbulento. se puede ver que entre los radios 45 y 50 (o bien, para De entre 375 y 400), existe un incremento significativo en el mezclado turbulento. Este incremento se da para valores del factor de fricción relativamente aproximados al valor asintótico. Si un ducto curvo como los estudiados se quisiera utilizar para una aplicación como un intercambiador de calor, sería conveniente dimensionar la geometría de tal forma de obtener un compromiso entre este incremento en el mezclado sin necesidad de usar radios de curvatura demasiado grandes.

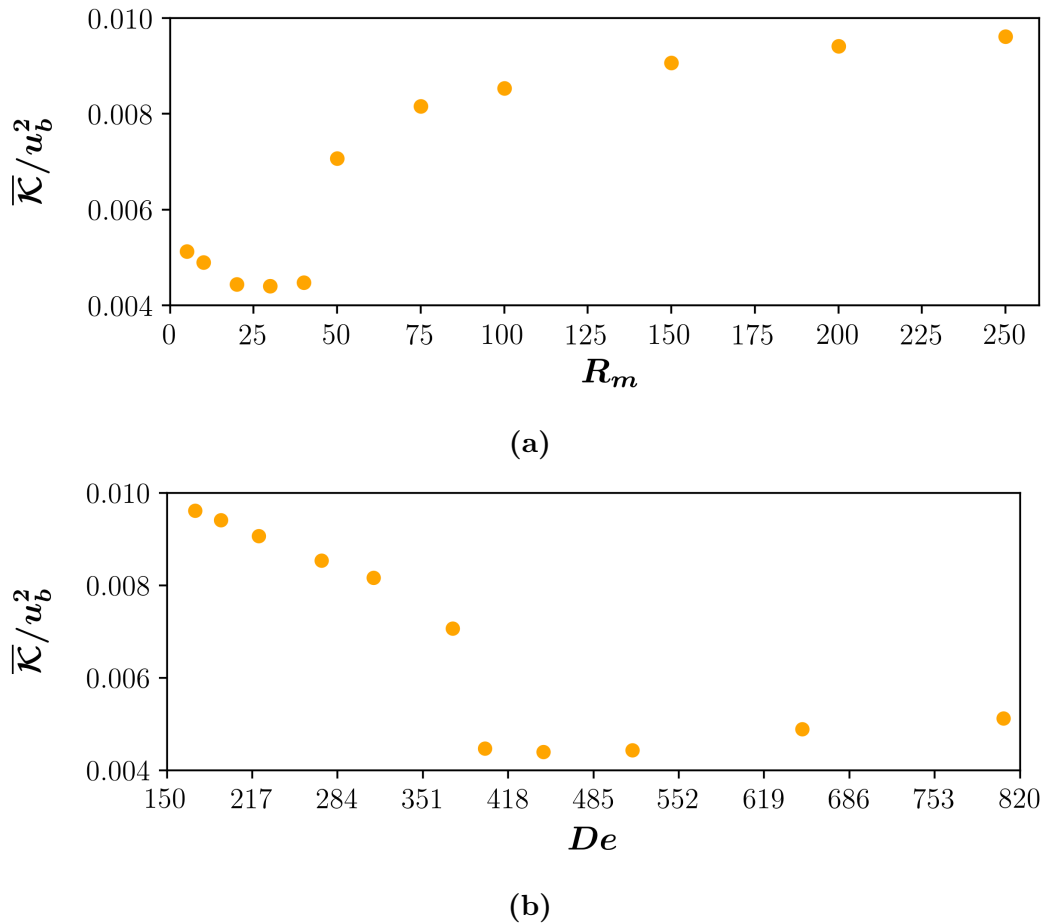


Figura 5.31: *Energía cinética turbulenta promedio en la sección, en función del radio medio (a) y del número de Dean.*

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron las características de los flujos en ductos curvos de sección cuadrada, en régimen turbulento. Se consideraron ductos de sección transversal cuadrada, en los cuales el flujo se encontraba sometido a un forzado homogéneo en la dirección angular. Se realizaron simulaciones directas de turbulencia (DNS, por su sigla en inglés) a partir de la implementación de un código de cálculo pseudo-espectral en coordenadas cilíndricas, obtenido a partir de la modificación de un código validado, utilizado para estudiar flujo en ductos rectos. Debido al costo computacional de este tipo de simulaciones, se analizaron casos para números de *Reynolds* moderados.

Se analizó la aparición de flujos secundarios sobre la sección transversal, con el objetivo de estudiar la interacción de los flujos secundarios de primer y segundo tipo. Los de primer tipo se generan debido a la aparición de una componente de vorticidad en la dirección del flujo, como consecuencia de la curvatura del ducto, mientras que los de segundo tipo existen únicamente en presencia de turbulencia. Se estudiaron los patrones de flujos secundarios, así como también la estructura del flujo medio, y las modificaciones sufridas por este, tanto por la presencia de flujos secundarios como por acción de la fuerza centrífuga, para seis valores distintos del radio medio de curvatura. Se pudo observar que para los radios más bajos, el flujo medio se encuentra considerablemente modificado por estos dos efectos, generando una distribución de flujo medio asimétrica, desplazada hacia el radio exterior del ducto. A medida que se consideran radios medios mayores, el flujo medio se vuelve menos asimétrico y el flujo secundario, menos importante.

La máxima recirculación se da desde el radio exterior al interior, por las paredes superior e inferior del ducto para los radios más bajos. Para radios mayores existe una transición que deriva en un incremento del tamaño de las celdas de flujo secundario de primer tipo, y una mayor preponderancia de la componente radial por el centro del ducto, hacia el radio exterior. De forma general, el flujo secundario evoluciona de una configuración de

dos vórtices contrarrotantes para los radios más bajos, a una distribución de dos celdas contrarrotantes por vértice, simétricas respecto de su bisectriz, para los radios mayores. En este último caso se observó que las ocho celdas de segundo tipo se encuentran inmersas en los dos vórtices mayoritarios (de primer tipo), y que sus intensidades resultan comparables.

Se estudiaron las distribuciones de corte en las paredes del ducto, y se observó que los valores máximos de tensión en la dirección del flujo aumentan en la pared interior y disminuyen en la pared exterior a medida que se incrementa el radio de curvatura. De forma análoga, sobre las paredes horizontales la tensión disminuye cerca del radio exterior y se incrementa sobre el radio interior. También se pudo relacionar la presencia de flujos secundarios con la existencia de máximos locales en las distribuciones de corte, cuya ubicación sobre la pared se modifica a medida que se incrementa el radio medio. Luego se analizó el desarrollo de la turbulencia en cada uno de los casos. Se pudo ver que para radios de curvatura bajos la turbulencia se encuentra confinada a una región cercana a la pared exterior, y que una fracción mayoritaria de la sección transversal no presenta perturbaciones significativas respecto a la media. A medida que se consideran radios medios mayores, la turbulencia penetra sobre la sección y se observan estructuras de distintos tamaños en una porción cada vez mayor de ésta.

Mediante el análisis de los valores *rms* se concluyó que la intensidad de la turbulencia respecto al flujo medio disminuye al considerar radios mayores, principalmente por el incremento de la velocidad media. Utilizando escalas locales de velocidad se pudo ver que sobre la pared interior existe un incremento brusco de la turbulencia para radios moderados, caracterizado por la aparición de un máximo de los valores *rms* cerca del centro del ducto, que se desplaza hacia el interior para radios medios mayores.

Se realizó también un estudio de los esfuerzos de *Reynolds* y su interpretación a partir de la configuración del flujo medio y de las perturbaciones. Los contornos de estas magnitudes sobre la sección resultan asimétricos, bidimensionales y fuertemente dependientes del radio de curvatura. Esto último da una idea de la complejidad de modelar este tipo de flujos, por ejemplo mediante la utilización de las ecuaciones *RANS*, debido a la dificultad de obtener un correcto modelo de cierre para la turbulencia.

Con el objetivo de estudiar el desarrollo de la turbulencia en el ducto, se analizaron los valores de energía cinética turbulenta, así como también de la producción y la disipación viscosa. Utilizando escalas globales de velocidad pudo verse que los valores máximos se encuentran siempre sobre la pared exterior. Además, estos máximos aumentan al incrementar el radio medio hasta un valor pico, y luego disminuyen para radios mayores. Se pudo verificar que los contornos de producción y disipación son semejantes, y que ambos son esencialmente nulos cerca de la pared interior para radios bajos. Esto último da la idea de que el efecto conjunto del flujo secundario y de la fuerza centrífuga tiende

a estabilizar el flujo e inhibir la turbulencia en esta región.

El hecho de que la presencia de turbulencia se encuentre confinada a la región exterior del ducto para los radios medios menores, es indicativo de que en estos casos no se observaron fenómenos propios de un régimen completamente turbulento. Por el contrario, estos casos corresponden posiblemente a un régimen de transición, en el que la región interior del ducto se encuentra estabilizada por el flujo secundario y la turbulencia no alcanza a desarrollarse en esta región. No obstante, la presencia de valores no nulos sobre la pared exterior de las cantidades de interés, tales como valores rms y energía cinética turbulenta, indican que es correcto referirse a los fenómenos descritos como localmente turbulentos en los casos de radios medios bajos.

Localmente se vio que la producción disminuye y la disipación aumenta sobre la pared exterior al incrementar el radio medio. Sobre la pared izquierda se verificó nuevamente una transición brusca entre valores prácticamente nulos para radios bajos, y valores monótonamente crecientes sobre la pared para radios mayores, tanto para la producción como para la disipación.

Se observó también que para radios medios suficientemente bajos aparecen dos vórtices adicionales sobre la pared derecha, que se adicionan a los dos vórtices contrarrotantes de flujo secundario de primer tipo. Estos últimos no resultan ser de primer ni segundo tipo, y se concluyó que su aparición se debe a una inestabilidad centrífuga que deriva en un intremento del gradiente de presión en la dirección radial por sobre la fuerza centrífuga. Estos vórtices modifican el flujo medio desplazándolo hacia la derecha, y atenuan la turbulencia de forma global sobre la pared exterior. No obstante, debido a que también generan una disminución en la velocidad de corte en esta pared, al analizar lo que ocurre de forma local con la turbulencia se concluyó que en estos casos los valores resultan máximos.

Finalmente, se analizaron una serie de propiedades globales del flujo, de potencial interés para aplicaciones de ingeniería. Por un lado se observó que el factor de fricción de *Darcy* decae con el radio medio, alcanzando para grandes radios de curvatura el valor asintótico correspondiente a un ducto recto. Por otro lado, se caracterizó el mezclado turbulento en el ducto, calculando la intensidad de la turbulencia promedio sobre toda la sección; se observó que existe un radio de curvatura para el cual el mezclado turbulento se incrementa bruscamente, con una disminución del factor de fricción menos importante.

6.1. Trabajos a futuro

Este trabajo representa la continuidad de una línea de investigación sobre la turbulencia en ductos de sección cuadrada, y es una primera aproximación al problema de

ductos curvos, de especial interés en el diseño de generadores de vapor helicoidales. Las simulaciones DNS resultan adecuadas para una mayor comprensión del fenómeno físico en cuestión, y eventualmente podrían utilizarse para proponer modelos de cierre que permitan realizar cálculos computacionalmente menos costosos.

Numerosos estudios pueden continuarse para complementar la información aquí mostrada, algunos de los cuales se indican a continuación.

- Realización de simulaciones DNS para números de *Reynolds* más elevados, con el objetivo de comparar resultados y verificar si existen soluciones semejantes para iguales números de *Dean*.
- Implementación de forzados no homogéneos para modelar el efecto macroscópico de la estratificación sobre el flujo.
- Implementación de un modelo sencillo de transporte de una segunda fase, como podría ser la presencia de burbujas en un flujo bifásico.
- Resolución de la ecuación de conservación de energía en la misma geometría, con el objetivo de estudiar y caracterizar la transferencia de calor en los distintos regímenes de flujo.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas

Sea $\mathbf{u} = u_r(r, \theta, z, t)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta, z, t)\mathbf{e}_\theta + u_z(r, \theta, z, t)\mathbf{e}_z$ el campo de velocidades en coordenadas cilíndricas. Se busca obtener la ecuación de conservación de momento lineal,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f}, \quad (\text{A.1})$$

para un fluido *Newtoniano*, con $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$. Se considera primero la derivada material, teniendo en cuenta que no todas las derivadas de los versores de esta terna son nulas,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r. \quad (\text{A.2})$$

La derivada material es

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (\text{A.3})$$

La derivada temporal se calcula en un punto fijo del espacio, por lo que los versores no se modifican. Considerando que las derivadas en la dirección radial y vertical de los versores son nulas, las derivadas espaciales resultan ser

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{e}_z,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{\partial u_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + u_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + u_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - u_\theta \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \\
&= \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \mathbf{e}_r + \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Juntando todo, se obtiene,

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) \mathbf{e}_r \\
&+ \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\
&+ \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Respecto a la divergencia del tensor de tensiones en coordenadas cilíndricas, para obtener su expresión se considera un elemento diferencial como el de la figura A.1 y se suman todas las contribuciones a los esfuerzos en la dirección radial,

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_{rr} r d\theta dz + \left(\sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \right) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_{r\theta} dr dz \cos \frac{d\theta}{2} \\
&+ \left(\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right) \left(r + \frac{dr}{2} \right) dr d\theta - \sigma_{rz} \left(r + \frac{dr}{2} \right) dr d\theta - \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} - \sigma_{\theta\theta} dr dz \sin \frac{d\theta}{2}
\end{aligned}$$

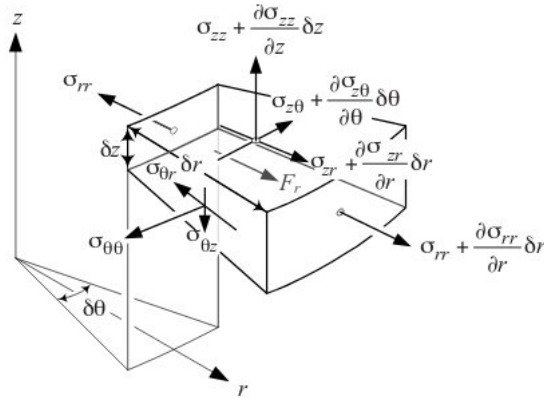


Figura A.1: Volumen de control diferencial sometido a tensiones normales y de corte, en coordenadas cilíndricas.

Cancelando los términos de segundo orden, simplificando la expresión y dividiendo por un elemento diferencial de volumen $dV = r dr dz d\theta$ se obtiene

$$\frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}.$$

Este proceso puede repetirse para las direcciones angular y vertical, finalmente la divergencia de σ puede calcularse como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= \left(\frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left(\frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

El gradiente del campo de velocidades es un tensor de segundo orden de la forma

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Introduciendo este resultado en la ecuación constitutiva de *Newton-Stokes* se obtiene,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Finalmente, reemplazando la expresión del tensor de tensiones en su divergencia, ecuación A.5, y operando algebraicamente [26] se obtienen las ecuaciones de *Navier-Stokes* en coordenadas cilíndricas,

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu (\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}) \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu (\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}) \quad (\text{A.6b})$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z \quad (\text{A.6c})$$

A.2. Derivación de las ecuaciones RANS en coordenadas cilíndricas

Se consideran ahora las ecuaciones de *Navier-Stokes* en su forma adimensional,

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (\text{A.7a})$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right), \quad (\text{A.7b})$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_z = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_z. \quad (\text{A.7c})$$

Para obtener las ecuaciones promediadas, se expresa cada valor instantáneo como la suma de su valor medio y la desviación respecto a este, $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$, y se promedian todos los términos de las ecuaciones. El promediado de los términos de derivada temporal, de gradiente de presión y el término difusivo resultan directos y análogos para las tres ecuaciones, debido a que estos términos son lineales, y a que el promedio de las perturbaciones es nulo. A modo de ejemplo se muestran los resultados para la ecuación en la dirección radial,

$$\frac{\partial \overline{u_r} + \overline{u_r'}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \overline{p} + \overline{p'}}{\partial r} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial r},$$

$$\frac{1}{Re} \left(\nabla^2 \overline{u_r} + \overline{u_r'} - \frac{\overline{u_r} + \overline{u_r'}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \overline{u_\theta} + \overline{u_\theta'}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 \overline{u_r} - \frac{\overline{u_r}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial \theta} \right).$$

A continuación se realiza el promediado de los términos advectivos no lineales. En primera instancia se considera la ecuación en la dirección radial

$$\overline{A_r} = \overline{(\overline{u_r} + \overline{u_r'}) \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u_r} + \overline{u_r'})} + \frac{\overline{(\overline{u_\theta} + \overline{u_\theta'})}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{u_r} + \overline{u_r'}) + \overline{(\overline{u_z} + \overline{u_z'})} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u_r} + \overline{u_r'}) - \frac{\overline{(\overline{u_\theta} + \overline{u_\theta'})^2}}{r}.$$

Desarrollando esta expresión y anulando los términos correspondientes a los promedios

de las desviaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{A_r} = & \overline{u_r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \frac{\overline{u_\theta}}{r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \theta} + \overline{u_z} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial z} - \frac{\overline{u_\theta}^2}{r} \\ & - \frac{\overline{u_r'^2}}{r} + \overline{u_r'} \frac{\partial u_r'}{\partial r} + \frac{u_\theta'}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z' \frac{\partial u_r}{\partial z}. \end{aligned}$$

Considerando que el campo de velocidades instantáneo debe verificar la ecuación de continuidad, podemos sumar $u_r'(\nabla \cdot \mathbf{u}') = 0$ al término advectivo promediado. Esta manipulación permite escribir los últimos tres términos de $\overline{A_r}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \overline{u_r' \frac{\partial u_r'}{\partial r} + \frac{u_\theta'}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z' \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r' \left(\frac{u_r'}{r} + \frac{\partial u_r'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta'}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z'}{\partial z} \right)} \\ & = \overline{2u_r' \frac{\partial u_r'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r' u_\theta') + \frac{\partial}{\partial z} (u_r' u_z') + \frac{u_r'^2}{r}} \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_r' u_\theta'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_r' u_z'} + \frac{\overline{u_r'^2}}{r}. \end{aligned}$$

Reemplazando esta última expresión, se tiene que el término advectivo es

$$\begin{aligned} \overline{A_r} = & \overline{u_r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \frac{\overline{u_\theta}}{r} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \theta} + \overline{u_z} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial z} - \frac{\overline{u_\theta}^2}{r} - \frac{\overline{u_r'^2}}{r} \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_r' u_\theta'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_r' u_z'} + \frac{\overline{u_r'^2}}{r}. \end{aligned}$$

Se puede llevar a cabo un proceso similar en las ecuaciones restantes, para ello es necesario sumar $u_\theta'(\nabla \cdot \mathbf{u}')$ en la ecuación angular, y $u_z'(\nabla \cdot \mathbf{u}')$ en la ecuación vertical. Los cálculos resultan análogos al mostrado para la dirección radial, finalmente las ecuaciones promediadas resultantes son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \overline{u_r} - \frac{\overline{u_\theta}^2}{r} = & -\frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{1}{Re_\tau} \left(\nabla^2 \overline{u_r} - \frac{\overline{u_r}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial \theta} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r'^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_r' u_\theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_r' u_z'} - \frac{\overline{u_r'^2}}{r} + \frac{\overline{u_\theta'^2}}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.8a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \overline{u_\theta} + \frac{\overline{u_\theta u_r}}{r} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re_\tau} \left(\nabla^2 \overline{u_\theta} - \frac{\overline{u_\theta}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \theta} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r' u_\theta'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_\theta'^2} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_\theta' u_z'} - 2 \frac{\overline{u_r' u_\theta'}}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.8b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \overline{u_z} = & -\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re_\tau} (\nabla^2 \overline{u_z}) - \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r' u_z'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_\theta' u_z'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_z'^2} - \frac{\overline{u_z' u_r'}}{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.8c})$$

A.3. Cálculos de posprocesamiento

A.3.1. Propiedades del valor medio

Sean $a(\mathbf{r}, t) = \bar{a}(\mathbf{r}) + a'(\mathbf{r}, t)$, $b(\mathbf{r}, t) = \bar{b}(\mathbf{r}) + b'(\mathbf{r}, t)$ dos funciones cualquiera, representadas como la suma de un valor medio temporal y una desviación respecto a ese valor, y sean α y β dos números reales, entonces se verifican las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}\overline{\overline{a(\mathbf{r})}} &= \overline{a(\mathbf{r})}, \\ \overline{a'(\mathbf{r}, t)} &= 0, \\ \overline{\alpha a(\mathbf{r}, t) + \beta b(\mathbf{r}, t)} &= \alpha \overline{a(\mathbf{r})} + \beta \overline{b(\mathbf{r})}, \\ \overline{\frac{\partial a}{\partial t}} &= \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}, \\ \overline{\frac{\partial a}{\partial j}} &= \frac{\partial \bar{a}}{\partial j}, \quad j \in \{r, \theta, z\} \\ \overline{\overline{a(\mathbf{r})} b(\mathbf{r}, t)} &= \overline{a(\mathbf{r}) b(\mathbf{r})}\end{aligned}$$

Todas estas propiedades resultan también válidas para promedios espaciales.

A.3.2. Cálculos de interés en este trabajo

A continuación se muestran las expresiones matemáticas que se utilizan para calcular las magnitudes de interés en este trabajo, respetando el orden en el que se presentan los resultados, así como también su nomenclatura.

$$\begin{aligned}u_b &= \int_0^2 \int_0^2 \overline{u_\theta}(r, z) dr dz, \\ u_{\tau, l} &= \sqrt{\frac{1}{Re_\tau} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\overline{u_\theta}}{r} \right) \Big|_{(\hat{r}, z)=(0,1)}}, \\ u_{\tau, r} &= \sqrt{-\frac{1}{Re_\tau} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\overline{u_\theta}}{r} \right) \Big|_{(\hat{r}, z)=(2,1)}}, \\ \tau_{r\theta} \Big|_{\hat{r}=0} &= \frac{1}{Re_\tau} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\overline{u_\theta}}{r} \right) \Big|_{\hat{r}=0}, \\ \tau_{z\theta} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0},\end{aligned}$$

las expresiones para $\tau_{r\theta} \Big|_{\hat{r}=2}$ y $\tau_{z\theta} \Big|_{z=2}$ resultan análogas, pero de signo contrario,

$$\tau_{rz} \Big|_{\hat{r}=0} = \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial z} \Big|_{\hat{r}=0},$$

$$\tau_{rz} \Big|_{z=0} = \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial r} \Big|_{z=0},$$

las expresiones para $\tau_{rz} \Big|_{\hat{r}=2}$ y $\tau_{rz} \Big|_{z=2}$ resultan análogas, pero de signo contrario,

$$u_{irms} = \sqrt{\overline{u_i'^2}}, \quad i \in \{r, \theta, z\}$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\overline{u_r'^2} + \overline{u_\theta'^2} + \overline{u_z'^2}),$$

$$\mathcal{P} = - \left[\overline{u_r'^2} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial r} + \overline{u_r' u_z'} \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial z} + \overline{u_r' u_\theta'} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial r} + \overline{u_\theta' u_z'} \frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial z} + \overline{u_r' u_z'} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial r} + \overline{u_z'^2} \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} \right],$$

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{2}{Re_t} & \left(\frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_r'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_r'^2} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_\theta'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_\theta'^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_\theta'^2} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_z'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overline{u_z'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_z'^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \overline{u_r'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \overline{u_r'^2} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \overline{u_r'^2} \right). \end{aligned}$$

Por último, se muestran a continuación las expresiones utilizadas para obtener los promedios de interés de las perturbaciones respecto a la media; en todos los casos estos cálculos se realizaron para las tres coordenadas. Estas expresiones se pueden deducir utilizando las propiedades del inciso anterior.

$$\overline{u_i'^2} = \overline{u_i^2} - \overline{u_i} \overline{u_i}$$

$$\overline{u_i' u_j'} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$$

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial j} \right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} \right)^2} - \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} \right)^2}$$

Práctica profesional supervisada

Durante el desarrollo de este proyecto integrador, se realizaron en carácter de "práctica profesional supervisada", 200 horas de trabajo en el grupo de Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche, bajo la supervisión de los directores del mismo, Dr. Mariano Cantero y Mgter. Julia Martorana. El objetivo de la práctica profesional fue la incursión del alumno en un entorno de desarrollo profesional, en el contexto de uno de los grupos de trabajo del Centro Atómico Bariloche.

Proyecto y diseño

Como actividad de proyecto de este trabajo puede mencionarse la implementación de un código de cálculo para el estudio de flujos turbulentos en un ducto curvo. Se utilizaron conceptos de las asignaturas Métodos Numéricos, Mecánica de Fluidos e Introducción a Python para Ingeniería y Física. A su vez, fue necesario adquirir conocimientos propios de métodos numéricos en fluidos y turbulencia.

La integración de conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera, con los adquiridos durante el proyecto se utilizaron para estudiar la fenomenología desde un enfoque de fundamentos básicos, y haciendo incapié en las potenciales aplicaciones que esta línea de investigación podrá tener en el futuro, en particular en la optimización de componentes termohidráulicos tales como generadores de vapor helicoidales.

Bibliografía

- [1] Bradshaw, P. Turbulent secondary flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **19**, 53–74, 1987. [1](#), [2](#)
- [2] Abad, J. D., Sequeiros, O., Spinewine, B., Garcia, M., Parker, G. Secondary flow in meandering channels on submarine fans: Implications for channel morphodynamics and architecture. *Geological Society of America Annual Meeting and Exposition*, *xi*, 2010. [ix](#), [2](#)
- [3] Pirozzoli, S., Modesti, D., Orlandi, P., Grasso, F. Turbulence and secondary motions in square duct flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **840**, 631–655, 2018. [ix](#), [2](#)
- [4] Abad, J. D., Frias, C. E., Buscaglia, G. C., Garcia, M. H. Modulation of the flow structure by progressive bedforms in the kinoshita meandering channel. *arXiv Surface Processes and Landforms*, **38**, 1612–1622, 2013. [ix](#), [2](#)
- [5] Ruspini, L. C., Marcel, C., Clausse, A. Two-phase flow instabilities: A review. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **71**, 521–448, 2014. [ix](#), [3](#)
- [6] Magni, M., Marcel, C., Delmastro, D. Estudio de la estabilidad termohidráulica de un generador de vapor con tubos helicoidales. *CIMEC*, **33** (7), 441–451, 2014. [4](#)
- [7] Dean, W. Fluid motion in a curved channel. *Proc. R. Soc. Lond.*, **121** (A), 402–420, 1928. [4](#)
- [8] Cheng, K., Lin, R., Ou, J. Fully developed laminar flow in curved rectangular channels. *J. Fluids Eng*, **98** (1), 41–48, 1976. [4](#)
- [9] Ghia, K., Sokhey, J. Laminar incompressible viscous flow in curved ducts of regular cross-sections. *J. Fluids Eng*, **99** (4), 640–648, 1977. [4](#)
- [10] Bara, B., Nandakumar, K., Masliyah, J. H. An experimental and numerical study of the dean problem: flow development towards two-dimensional multiple solutions. *Journal of Fluid Mechanics*, **244**, 339–376, 1992. [4](#), [29](#), [32](#), [79](#)

- [11] Hille, P., Vehrenkamp, R., Schulz-Dubois, E. O. The development and structure of primary and secondary flow in a curved square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, **151**, 219–241, 1985. [4](#)
- [12] Gavrilakis, S. Numerical simulation of low-reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, **244**, 101–129, 1992. [4](#), [37](#), [44](#)
- [13] Pinelli, A., Uhlmann, M., Sekimoto, A., Kawahara, G. Reynolds number dependence of mean flow structure in square duct turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **644**, 107–122, 2010. [4](#)
- [14] Vinuesa, R., Noorani, A., Lozano-Durán, A., Khoury, G. K. E., Schlatter, P., Fischer, P. F., *et al.* Aspect ratio effects in turbulent duct flows studied through direct numerical simulation. *Journal of Turbulence*, **15** (10), 677–706, 2014. [4](#)
- [15] Münch, C., Métais, O. Large eddy simulations in curved square ducts: variation of the curvature radius. *Journal of Turbulence*, **8**, N28, 2007. [5](#)
- [16] Münch, C., Métais, O. Large Eddy Simulations of the turbulent flow in curved ducts: influence of the curvature radius, págs. 209–216. 2005. [5](#)
- [17] Huettl, T., Friedrich, R. Direct numerical simulation of turbulent flows in curved and helically coiled pipes. *Computers Fluids*, **30**, 591–605, 06 2001. [5](#)
- [18] Castiglia, F., Chiovaro, P., Ciofalo, M., Liberto, M. D., Maio, P. A. D., Piazza, I., *et al.* Modelling flow and heat transfer in helically coiled pipes . part 2 : Direct numerical simulations for laminar , transitional and weakly turbulent flow in the case of zero pitch. 2010. [5](#)
- [19] Martorana, J. Simulación directa de turbulencia de flujo secundario con forzado no homogéneo. Tesis de Maestría en Ingeniería, Instituto Balseiro, 2017. [5](#), [25](#), [33](#), [37](#), [49](#)
- [20] Kundu, P. Fluid Mechanics. Academic Press, 1990. [8](#), [9](#), [13](#), [15](#), [58](#)
- [21] Pope, S. B. Turbulent Flows. Cambridge University Press, 2000. [12](#), [13](#), [17](#)
- [22] Kim, J., Moin, P. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, **59** (2), 308 – 323, 1985. [19](#)
- [23] Moin, P. Fundamentals of Engineering Numerical Analysis. Cambridge University Press, 2010. [21](#), [22](#), [23](#)
- [24] Landau, L., Lifshitz, E. M. Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1959. [27](#)

-
- [25] Ito, H. Friction factors for turbulent flow in curved pipes. *Journal of Basic Engineering*, **81** (2), 123 – 132, 1959. [xii](#), [xiii](#), [37](#), [83](#)
- [26] Michieli Vitturi, M. Navier-stokes equations in cylindrical coordinates. INGV Pisa, Italy. [91](#)

Agradecimientos

Son muchas las personas que me acompañaron en este camino que culmina, y no quisiera olvidarme de mencionar a ninguna de ellas.

En primer lugar quiero agradecer a mi director Mariano Cantero, por la propuesta de este trabajo y por el conocimiento y los consejos brindados. También a mi codirectora Julia Martorana, por enseñarme a utilizar las herramientas necesarias, una ayuda que fue fundamental en los primeros meses del proyecto.

A los amigos que hice en el Instituto Balseiro, quienes no me cabe duda que continuarán siendo grandes amistades al finalizar este ciclo, Gabriel De Simone, Ezequiel Giulio, Valentino Del Pesco, Lucca Dellazoppa y también a todos mis compañeros de Ingeniería Mecánica, por haber sido una gran compañía en estos años.

A mis padres, abuelos y familia en general, por el constante apoyo a lo largo de todos mis años de educación, pero principalmente a mi madre Anabel, por ser el motor principal de este logro.

Y finalmente pero muy importante a Brenda, por haber decidido compartir conmigo este placentero pero (a veces) duro camino, y por convertirse en una persona muy importante para mí.

A todos ellos, mi más sentido agradecimiento.

